تم بيع أكثر من ٣٠ مليون نسخة من ملخصات شوم!

الرياضيات المتقطعة

ملخصات شوم إيزي

- يغطى جميع أساسيات المنهج
- يحتوى على الكثير من المسائل المحلولة حلاً كاملاً
- أفضل وسيلة دقيقة وموجزة لمساعدة الطالب على التفوق والنجاح

د. سيمور ليبشتز

د. مارك ليبسون



الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م

مصر

الرياضيات المتقطعة

المؤلف

د.سيمور ليبشتر

د.مارك ليبسون

محرر الموجز

د. چورچ چ. هادمينوس

ترجمة

د.انتصارات محمد حسن الشبكي

أستاذ الرياضيات البحتة ورئيس القسم السابق

كلية العلوم- جامعة عين شمس

مراجعة

د .أحمد فؤاد غالب

استاذ الرياضيات كلية العلوم - جامعة القاهرة

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م

مصر

حقوق النشر

الرياضيات المتقطعة

Discrete Mathematics

by

SEYMOUR LIPSCHUTZ, PH.D.

MARC LIPSON, PH.D.

International House for Cultural Investments S.A.E.

8, Ibrahim El-Orabi St., El-Nozha El-Gedida

P.O.Box 5599 Heliopolis West, Cairo, Egypt

E-mail: ihci@link.net

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م

8 إبراهيم العرابى - النزهة الجديدة - مصر الجديدة - القاهرة - ج . م . ع

ص. ب: 5599 هليوبوليس غرب/ القاهرة - تليفون: 6222105/6221944 فاكس : 6221944 (00202)

بريد إلكترونى: ihci@link.net

رقم الإيداع: 2005/17032

I.S.B.N: 977-282-216-4

كتب أخرى فى
سلسلة ملخصات شوم إيـزى

ملخص شوم إيـزى : الفيزياء العامة
ملخص شوم إيـزى : الفيزياء التطبيقية
ملخص شوم إيـزى : الكهرومغناطيسيات
ملخص شوم إيـزى : الكيمياء العامة
ملخص شوم إيـزى : الكيمياء العضوية
ملخص شوم إيـزى : البيولوچيا
ملخص شوم إيـزى : البيولوچيا الجزيئية وبيولوچيا الخلية
ملخص شوم إيـزى : الوراثة
ملخص شوم إيـزى : الجبر العام
ملخص شوم إيـزى : الجبر الأساسى
ملخص شوم إيـزى : الهندسة
ملخص شوم إيـزى : الإحصاء
ملخص شوم إيـزى : الاحتمالات والإحصاء
ملخص شوم إيـزى : حساب التفاضل والتكامل
ملخص شوم إيـزى : مبادئ التفاضل والتكامل
ملخص شوم إيـزى : حساب المثلثات
ملخص شوم إيـزى : مرجع رياضى لأهم القوانين والجداول
ملخص شوم إيـزى : البرمجة بلغة C++
ملخص شوم إيـزى : البرمجة بلغة JAVA
ملخص شوم إيـزى : أساسيات الكهرباء
ملخص شوم إيـزى : مبادئ الاقتصاد
ملخص شوم إيـزى : الإحصاء التجارى
ملخص شوم إيـزى : مبادئ المحاسبة
ملخص شوم إيـزى : مقدمة فى علم النفس

سيمور ليبشُتز: أحد أعضاء هيئة التدريس بجامعة تمبل وكان سابقًا يقوم بالتدريس فى المعهد الهندسى ببروكلين. حصل على درجة الدكتوراه فى 1960 من معهد كورانت لعلوم الرياضيات بجامعة نيويورك. وهو أحد المؤلفين الأساسيين لسلسلة شوم. كتب ملخصات شوم فى مبادئ الجبر الخطى، الرياضيات المتقطعة، الاحتمالات، التوبولوچى العام، الرياضيات المنتهية، نظرية الفئات.

مارك لارس ليبسون: يقوم بالتدريس بجامعة چورچيا. حصل على درجة الدكتوراه فى المالية فى 1994 من جامعة ميشجان. هو مؤلف مشارك مع سيمور ليبشتز لسلسلة شوم فى الرياضيات المتقطعة والاحتمالات.

چورچ هاديمينوس: قام بالتدريس فى جامعة دالاس وأجرى أبحاثًا بالمركز الطبى لجامعة مساتشوستس وبجامعة كاليفورنيا بلوس أنجلوس. حصل على درجة البكالوريوس من جامعة الولاية بأنجلو ثم حصل على درجتى الماجستير والدكتوراه من جامعة تكساس بدالاس. هو مؤلف لعديد من الكتب فى سلسلة شوم وملخصات شوم إيزى.

المحتويات

الفصل الأول
نظرية الفئات
Set Theory

فى هذا الفصل:

- ✔ الفئات والعناصر
- ✔ الفئات الشاملة والفئات الخالية
- ✔ الفئات الجزئية
- ✔ مخططات ڤن
- ✔ العمليات على الفئات
- ✔ جبر الفئات والثُنائية
- ✔ الفئات المنتهية، مبدأ العد
- ✔ فصول الفئات، فئات القوى، التجزىء

الفئات والعناصر Sets and Elements

الفئة هى مجموعة من الأشياء، يقال لها عناصر elements or members، وعادة تستخدم الحروف الكبيرة $A, B, X, Y, \ldots$ كرموز للفئات والحروف الصغيرة $a, b, x, y, \ldots$ كرموز لعناصر الفئات.

والتقرير "p عنصر من الفئة A" أو التقرير المكافئ "p ينتمى إلى A" يكتب

$$p \in A$$

أما التقرير "p ليس عنصرًا فى A"، أى نفى التقرير $p \in A$، فيكتب

$$p \notin A$$

حقيقة أن المجموعة تتحدد تحديدًا كاملاً إذا تم تحديد عناصرها تعرف باسم مبدأ المد.

مبدأ المَدّ **Principle of Extension**

الفئتان A وB متساويتان، إذا، وفقط إذا، احتوتا على نفس العناصر.

تحديد الفئات Specifying Sets

توجد أساسًا طريقتان للتعبير عن الفئة. الطريقة الأولى تتلخص فى سرد عناصر الفئة، إذا كان ذلك ممكنًا، مثلاً

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

تمثل الفئة التى عناصرها الحروف a, e, i, o, u. لاحظ أن العناصر بينها فصلات (,) ومحتواة بين قوسين { }. والطريقة الثانية أن تذكر الخواص التى تميز العناصر فى هذه الفئة. مثلاً

$$B = \{x: x \text{ is an even integer}, x > 0\}$$

وتقرأ "B هى فئة العناصر x، حيث x عدد صحيح زوجى وأكبر من الصفر". يرمز ذلك للفئة B التى عناصرها الأعداد الزوجية الموجبة. وفى هذه الحالة يرمز حرف x لعنصر نمطى فى الفئة و (:) colon يقرأ "حيث" وأيضًا (,) comma تقرأ "و".

مسألة محلولة 1.1

(*a*) الفئة السابقة A يمكن أيضًا كتابتها كالآتى:

$$A = \{x: x \text{ is a letter in the English alphabet}, x \text{ is a vowel}\}$$

أى أن A هى فئة الحروف المتحركة فى اللغة الإنجليزية. لاحظ أن $b \notin A$، $e \in A$، $p \notin A$.

(*b*) لا نستطيع سرد جميع عناصر الفئة B السابقة، بالرغم من أننا نحددها تمامًا فنكتب عادة

$$B = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

حيث يُفترض أن كل شخص يعلم ماذا نقصد هنا، وهو الاسترسال فى ذكر الأعداد الزوجية الموجبة. ونلاحظ أن $8 \in B$ ولكن $-7 \notin B$.

(*c*) لتكن $E = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$، أى أن E تتكون من الأعداد التى هى حلول للمعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$، أحيانًا تسمى E فئة الحل solution set للمعادلة المعطاة. ولأن حلول المعادلة هى 1، 2 يمكن كتابة $E = \{1, 2\}$.

(*d*) لتكن $E = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$، $F = \{2, 1\}$ و $G = \{1, 2, 2, 1, 2\}$، فإن $E = F = G$. ونلاحظ أن الفئة لا تعتمد على طريقة عرض عناصرها؛ أى أن الفئة تظل كما هى إذا تكررت عناصرها أو أعيد ترتيبها.

Solved Problem 1.1

(*a*) The set A above can also be written as

$$A = \{x: x \text{ is a letter in the English alphabet}, x \text{ is a vowel}\}$$

Observe that $b \notin A$, $e \in A$, and $p \notin A$.

(*b*) We could not list all the elements of the above set B although frequently we specify the set by writing

$$B = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

where we assume that everyone knows what we mean. Observe that $8 \in B$ but $-7 \notin B$.

(*c*) Let $E = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$. In other words, E consists of those numbers which are solutions of the equation $x^2 - 3x + 2 = 0$, sometimes called the *solution set* of the given equation. Since the solutions of the equation are 1 and 2, we could also write $E = \{1, 2\}$.

(*d*) Let $E = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $F = \{2, 1\}$ and $G = \{1, 2, 2, 1, 2\}$. Then $E = F = G$. Observe that a set does not depend on the way in which its elements are displayed. A set remains the same if its elements are repeated or rearranged.

✓ يجب أن تعرف

بعض الفئات يتكرر ذكرها ولذلك نستخدم بعض الرموز الخاصة للتعبير عنها

فئة الأعداد الصحيحة الموجبة $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

فئة الأعداد الصحيحة $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

فئة الأعداد النسبية $= Q$

فئة الأعداد الحقيقة $= R$

فئة الأعداد المركبة $= C$



وحتى إذا أمكننا سرد عناصر الفئة فإن ذلك قد لا يكون عمليًا. فمثلاً، لا نسرد عدد المواليد فى العالم خلال عام 1976 بالرغم من إمكانية حصر ذلك نظريًا.

أى أننا نصف الفئة بسرد عناصرها فقط إذا كانت تحتوى على قليل من العناصر. أما فى غير ذلك، فإننا نصف الفئة بالخاصية التى تميز عناصرها.

وحقيقة إنه يمكن وصف فئة بخاصية ما تُعرف بمبدأ التجريد.

where we assume that everyone knows what we mean. Observe that $8 \in B$ but $-7 \notin B$.

(*c*) Let $E = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$. In other words, E consists of those numbers which are solutions of the equation $x^2 - 3x + 2 = 0$, sometimes called the *solution set* of the given equation. Since the solutions of the equation are 1 and 2, we could also write $E = \{1, 2\}$.

(*d*) Let $E = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $F = \{2, 1\}$ and $G = \{1, 2, 2, 1, 2\}$. Then $E = F = G$. Observe that a set does not depend on the way in which its elements are displayed. A set remains the same if its elements are repeated or rearranged.

✓ يجب أن تعرف

بعض الفئات يتكرر ذكرها ولذلك نستخدم بعض الرموز الخاصة للتعبير عنها

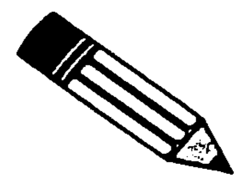
فئة الأعداد الصحيحة الموجبة $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

فئة الأعداد الصحيحة $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

فئة الأعداد النسبية = Q

فئة الأعداد الحقيقية = R

فئة الأعداد المركبة = C



وحتى إذا أمكننا سرد عناصر الفئة فإن ذلك قد لا يكون عمليًا. فمثلاً، لا نسرد عدد المواليد فى العالم خلال عام 1976 بالرغم من إمكانية حصر ذلك نظريًا.

أى أننا نصف الفئة بسرد عناصرها فقط إذا كانت تحتوى على قليل من العناصر. أما فى غير ذلك، فإننا نصف الفئة بالخاصية التى تميز عناصرها.

وحقيقة إنه يمكن وصف فئة بخاصية ما تُعرف بمبدأ التجريد.

مبدأ التجريد **Principle of Abstraction**

إذا أعطيت فئة U وأى خاصية P، فإنه توجد فئة A عناصرها هى بالضبط عناصر الفئة U التى تحقق الخاصية P.

الفئة الشاملة والفئة الخالية

Universal Set and Empty Set

فى أى تطبيق لنظرية الفئات، تكون عناصر كل الفئات تحت الفحص منتمية إلى فئة معينة كبيرة تسمى الفئة الشاملة. مثلاً فى الهندسة المستوية تتكون الفئة الشاملة من جميع النقط فى المستوى. وفى الدراسات السكانية فإن الفئة الشاملة تتكون من جميع سكان العالم. سوف نرمز للفئة الشاملة بالرمز

$$U$$

إلا إذا ذكر غير ذلك صراحة.

بالنسبة لفئة ما U والخاصية P، قد لا يوجد أى عنصر من U يحقق الخاصية P. على سبيل المثال اعتبر الفئة

$$S = \{x: x \text{ is a positive integer}, x^2 = 3\}$$

هذه الفئة لا تحتوى على أية عناصر حيث لا يوجد عدد صحيح موجب له الخاصية المطلوبة. تسمى الفئة التى لا تحتوى على أية عناصر بالفئة الخالية أو الفئة الصفرية empty or null set ويرمز لها بالرمز

$$\varnothing$$

وتوجد فئة خالية وحيدة؛ أى أنه إذا كان كل من S و T فئة خالية فإن $S = T$ لأن لهما بالضبط نفس العناصر، بالتحديد، لا شيء.

الفئات الجزئية Subsets

إذا كان كل عنصر من الفئة A هو أيضًا عنصر من الفئة B، فإن A تسمى فئة جزئية من B، ونقول أيضًا أن الفئة A محتواة فى الفئة B أو أن B تحتوى A. وتكتب هذه العلاقة

$$A \subseteq B \qquad \text{أو} \qquad B \supseteq A$$

مسألة محلولة 1.2 الفئة $E = \{2, 4, 6\}$ هى فئة جزئية من الفئة $F = \{6, 2, 4\}$ حيث أن كل عدد 2، 4، 6 ينتمى إلى E ينتمى أيضًا إلى F. وفى الحقيقة $E = F$. بالمثل يمكن إثبات أن كل فئة هى فئة جزئية من نفسها.

Solved Problem 1.2 The set $E = \{2, 4, 6\}$ is a subset of the set $F = \{6, 2, 4\}$, since each number 2, 4, and 6 belonging to E also belongs to F. In fact, $E = F$. In a similar manner, it can be shown that every set is a subset of itself.

يجب ملاحظة الخواص التالية للفئات :

(i) كل فئة A هى فئة جزئية من الفئة الشاملة U، لأنه من التعريف جميع عناصر A تنتمى إلى U. وأيضًا الفئة الخالية $\varnothing$ هى فئة جزئية من A.

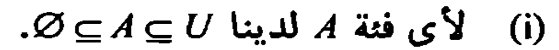
(ii) كل فئة A هى فئة جزئية من نفسها وذلك لأن عناصر A تنتمى إلى A.

(iii) إذا كان كل عنصر من A ينتمى إلى الفئة B وكل عنصر من B ينتمى إلى الفئة C، فمن الواضح أن كل عنصر من A ينتمى إلى C وبعبارة أخرى إذا كان $A \subseteq B$ و$B \subseteq C$ فإن $A \subseteq C$.

(iv) إذا كانت $A \subseteq B$ وكانت $B \subseteq A$ فإن A وB لهما نفس العناصر أى أن $A = B$. وبالعكس إذا كانت $A = B$ فإن $A \subseteq B$، $B \subseteq A$ وذلك لأن كل فئة هى فئة جزئية من نفسها.

ونصوغ هذه النتائج فى الشكل الآتى:

نظرية 1.1



(i) لأى فئة A لدينا $\varnothing \subseteq A \subseteq U$.



(ii) لأى فئة A لدينا $A \subseteq A$.

(iii) إذا كانت $A \subseteq B$ وكانت $B \subseteq C$ فإن $A \subseteq C$.

(iv) $A = B$ إذا، وفقط إذا، كانت $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

إذا كانت $A \subseteq B$ فإنه من الممكن أن تكون $A = B$. أما عندما تكون $A \subseteq B$ ولكن $A \neq B$، فإننا نقول إن A فئة جزئية أصيلة proper subset من B ويرمز لها بالرمز $A \subset B$. مثلاً نفترض أن

$$A = \{1, 3\} \qquad B = \{1, 2, 3\} \qquad C = \{1, 3, 2\}$$

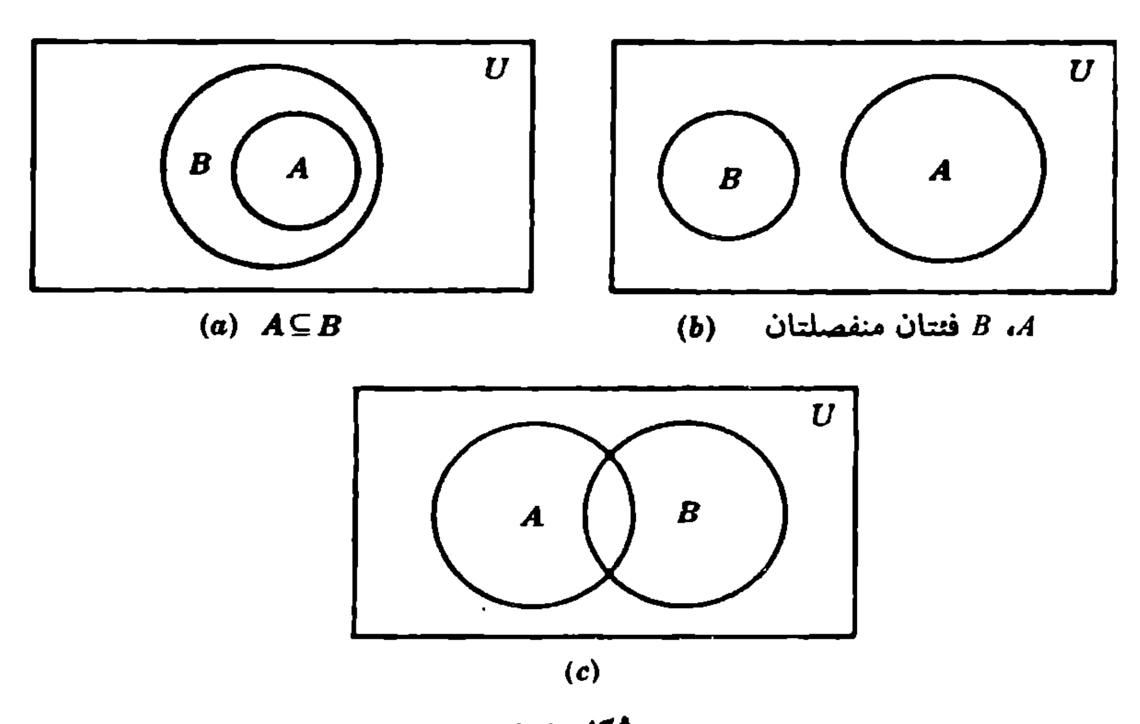
فإن A وB فئتان جزئيتان من C، لكن A فئة جزئية أصيلة من C، بينما B ليست فئة جزئية أصيلة من C حيث $B = C$.

مخططات ڤن Venn Diagrams

مخططات ڤن هى تمثيل تصويرى للفئات حيث تمثل الفئات بمساحات محاطة بمنحنيات مغلقة فى المستوى.

الفئة الشاملة تمثل بمساحة داخل مستطيل والفئات الأخرى تمثل بأقراص داخل هذا المستطيل. فإذا كانت $A \subseteq B$ فإن القرص الذى يمثل A يقع تمامًا داخل القرص الذى يمثل B كما فى شكل 1-1(a). إذا كانت A وB منفصلتين بمعنى أنه لا يوجد عنصر مشترك بينهما فإن القرص الممثل لـ A منفصل عن القرص الممثل لـ B كما فى الشكل 1-1(b).

وعلى أية حال إذا كانت A وB أى فئتين فمن الممكن أن توجد بعض العناصر فى A ولكنها ليست فى B وكذلك بعض العناصر فى B وليست فى A وبعضها الآخر يوجد فى كل من A وB. وأيضًا هناك عناصر لا توجد فى A ولا توجد فى B. وعمومًا تمثل هذه الحالة لـ A وB بالشكل 1-1(c).



(a) $A \subseteq B$ (b) A، B فئتان منفصلتان

(c)

شكل 1-1

الحجج ومخططات ڤن Arguments and Venn Diagrams

كثير من التقارير الكلامية هى فى الأساس تقارير عن فئات وبالتالى يمكن وصفها بأشكال ڤن. ولذلك فإنه يمكن استعمال أشكال ڤن لتحديد ما إذا كانت الحجة argument صحيحة أم لا.

مسألة محلولة 1.3 أثبت أن الحجة التالية [مقتبسة من كتاب عن المنطق مؤلفه Lewis Carroll مؤلف كتاب "أليس فى بلاد العجائب"] صحيحة.

S_1: الطاسات الخاصة بى هى الشىء الوحيد، من بين كل ما أملك، المصنوع من القصدير.

S_2: أنا وجدت كل هداياك لى مفيدة جداً.

S_3: ولا أى من طاساتى لها أدنى استعمال.

S: هداياك لى غير مصنوعة من القصدير.

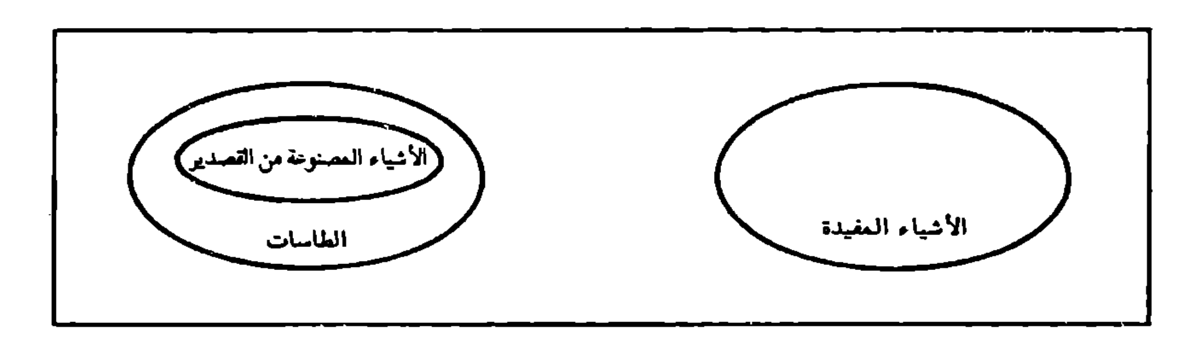
Solved Problem 1.3 Show that the following argument (adapted from a book on logic by Lewis Carroll, the author of *Alice in Wonderland*) is valid:

S_1: My saucepans are the only things I have that are made of tin.
S_2: I find all your presents very useful.
S_3: None of my saucepans is of the slightest use.

S: Your presents to me are not made of tin.

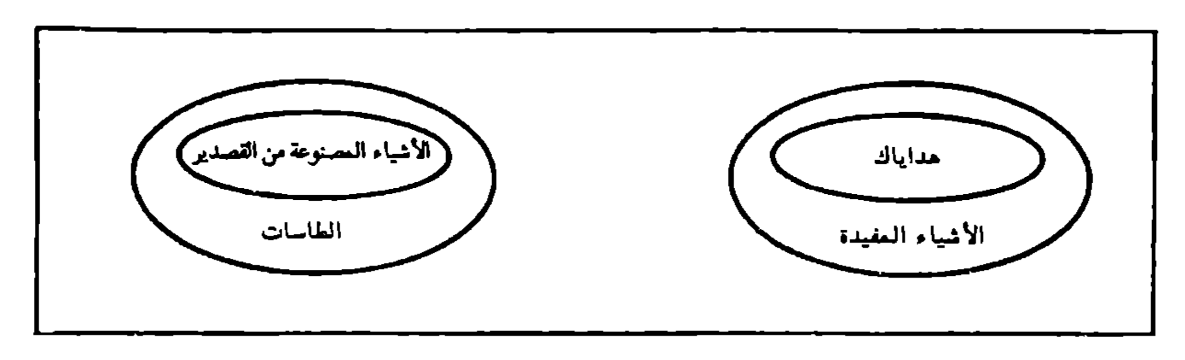
التقارير S_1، S_2، S_3 هـى الفـروض، والتقريـر S هـو النتيجـة. تصبـح الحجـة صحيحة إذا كان S ينتج منطقيًا من الفروض S_1، S_2، وS_3.

من S_1 الأشياء المصنوعة من القصدير هـى فئة جزئية من فئة الطاسات. ومن S_3 فئة الطاسات وفئـة الأشيـاء المفيـدة منفصلتـان وبالتـالى نحصـل علـى مخطط ڤن 1-2.



شكل 1-2

من S_2 فئة (هداياك) هى فئة جزئيـة مـن فئـة الأشيـاء المفيـدة وبالتـالى نحصل على مخطط ڤن 1-3.



شكل 1-3

والنتيجة من الواضح أنها صحيحة من أشكال ﭭن السابقة وذلك لأن فئة (هداياك) (your presents) منفصلة عن فئة (tin objects) الأشياء المصنوعة من القصدير.

العمليات على الفئات Set Operations

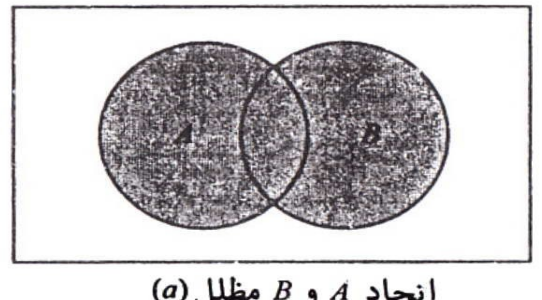
هذا البند يقدم عدداً من العمليات الهامة على الفئات.

الاتحاد والتقاطع Union and Intersection

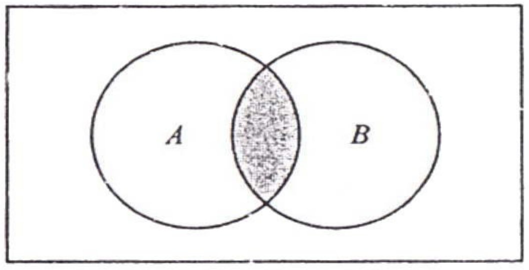
اتحاد union فئتين A وB، ويرمز له بالرمز $A \cup B$، هو فئة جميع العناصر التي تنتمي إلى A أو إلى B أي أن

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ or } x \in B\}$$

وهنا or تستخدم بمعنى "أو/ و". شكل 1-4(*a*) هو مخطط ﭭن حيث الاتحاد $A \cup B$ مُظلل



انحاد A و B مظلل(*a*)



تقاطع A و B مظلل(*b*)

شكل 1-4

تقاطع intersection فئتين A وB، ويرمز له بالرمز $A \cap B$، هو فئة العناصر التي تنتمي إلى كل من A وB أي أن

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ and } x \in B\}$$

شكل 1-4(*b*) هو مخطط ﭭن حيث التقاطع $A \cap B$ مظلل.

والنتيجة من الواضح أنها صحيحة من أشكال ڤن السابقة وذلك لأن فئة (هداياك) (your presents) منفصلة عن فئة (tin objects) الأشياء المصنوعة من القصدير.

العمليات على الفئات Set Operations

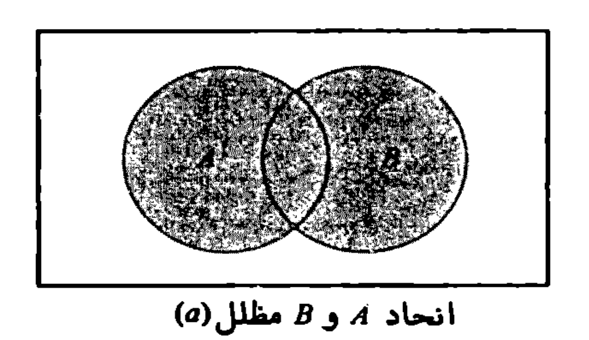
هذا البند يقدم عدداً من العمليات الهامة على الفئات.

الاتحاد والتقاطع Union and Intersection

اتحاد union فئتين A وB، ويرمز له بالرمز $A \cup B$، هو فئة جميع العناصر التى تنتمى إلى A أو إلى B أى أن

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ or } x \in B\}$$

وهنا or تستخدم بمعنى "أو/ و". شكل 1-4(*a*) هو مخطط ڤن حيث الاتحاد $A \cup B$ مُظلل



تقاطع A و B مظلل(*b*)

اتحاد A و B مظلل(*a*)

شكل 1-4

تقاطع intersection فئتين A وB، ويرمز له بالرمز $A \cap B$، هو فئة العناصر التى تنتمى إلى كل من A وB أى أن

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ and } x \in B\}$$

شكل 1-4(*b*) هو مخطط ڤن حيث التقاطع $A \cap B$ مظلل.

إذا كانت $A \cap B = \varnothing$ أى إذا كان A وB لا يحتويان على أى عناصر مشتركة، فإن A وB يقال عنهما أنهما منفصلتين أو غير متقاطعتين.

مسألة محلولة 1.4 لتكن $A = \{1, 2, 3, 4\}$، $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ ، $C = \{2, 3, 5, 7\}$.
أوجد $(a)\ A \cup B$، $(b)\ A \cap B$، $(c)\ A \cup C$، $(d)\ A \cap C$.

Solved Problem 1.4 Let $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, and $C = \{2, 3, 5, 7\}$. Find $(a)\ A \cup B$; $(b)\ A \cap B$; $(c)\ A \cup C$; and $(d)\ A \cap C$.

الحل:

$(a)\ A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$(b)\ A \cap B = \{3, 4\}$
$(c)\ A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
$(d)\ A \cap C = \{2, 3\}$

عملية احتواء الفئات ترتبط بشدة بعمليات الاتحاد والتقاطع كما يتضح من النظرية التالية.

نظرية 1.2: التقارير التالية متكافئة : $A \subseteq B$، $A \cap B = A$ و $A \cup B = B$.

المتممات Complements

نذكر أن جميع الفئات تحت الدراسة فى وقت ما هى فئات جزئية من فئة شاملة U. المتمم المطلق absolute complement للفئة A، ونرمز له بالرمز A^C، هو فئة العناصر التى تنتمى إلى U ولا تنتمى إلى A. أى أن

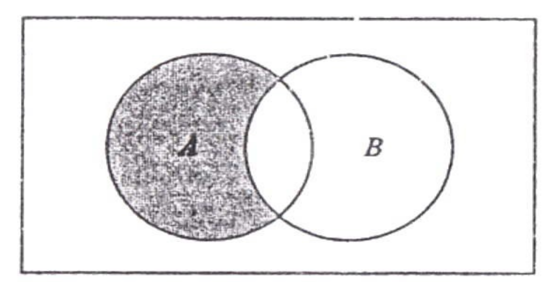
$$A^c = \{x: x \in U, x \notin A\}$$

شكل $1\text{-}5(a)$ هو مخطط ڤن حيث A^c مُظللة.

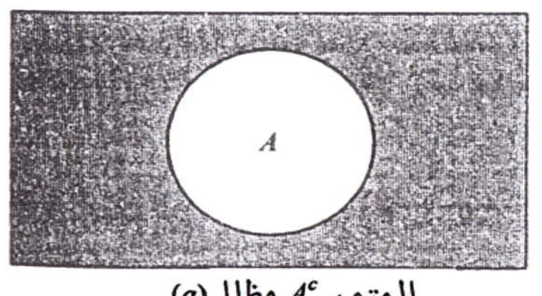
المتممِ النسبى relative complement للفئة B بالنسبة للفئة A أو الفرق difference بين A وB، ويرمز له بـ $A \setminus B$، هو فئة العناصر التى تنتمى إلى A ولا تنتمى إلى B؛ أى أن

$$A \setminus B = \{x: x \in A, x \notin B\}$$

الفئة $A\setminus B$ تقرأ "A ناقص B". شكل $1\text{-}5(b)$ مخطط ڤن حيث $A\setminus B$ مُظللة.



الفرق $A\setminus B$ مظلل(b)



المتمم A^c مظلل(a)

شكل 1-5

الفرق المتماثل Symmetric Difference

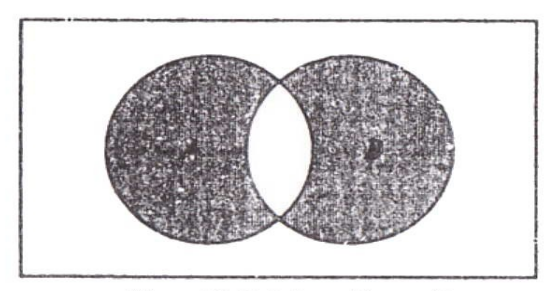
الفرق المتماثل للفئتين، A وB يرمز له بالرمز $A \oplus B$، يتكون من العناصر التى تنتمى إلى A أوB وليس كليهما؛ أى أن

$$A \oplus B = (A \cup B)\setminus (A \cap B)$$

ويمكن أيضًا إثبات أن

$$A \oplus B = (A\setminus B) \cup (B\setminus A)$$

فمثلاً إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ فإن:
$A\setminus B = \{1, 2, 3\}$، $B\setminus A = \{7, 8, 9\}$، وبالتالى فإن $A \oplus B = [1, 2, 3, 7, 8, 9\}$.



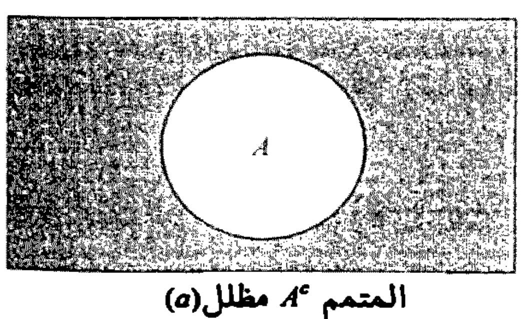
الفرق المتماثل $A\oplus B$ مظلل

شكل 1-6

الشكل 1-6 يوضح مخطط ڤن حيث $A \oplus B$ مظلل.

الفئة $A\backslash B$ تقرأ "A ناقص B". شكل 1-5(b) مخطط ڤن حيث $A\backslash B$ مُظللة.





الفرق $A\backslash B$ مظلل(b) — المتمم A^c مظلل(a)

شكل 1-5

الفرق المتماثل Symmetric Difference

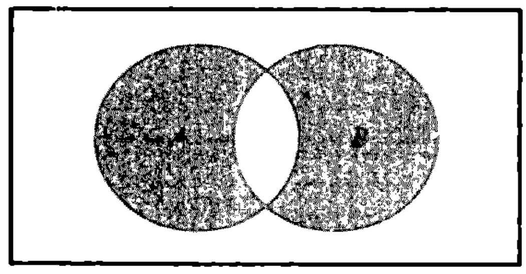
الفرق المتماثل للفئتين، A وB يرمز له بالرمز $A \oplus B$، يتكون من العناصر التى تنتمى إلى A أوB وليس كليهما؛ أى أن

$$A \oplus B = (A \cup B)\backslash (A \cap B)$$

ويمكن أيضًا إثبات أن

$$A \oplus B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$

فمثلاً إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ فإن:
$A\backslash B = \{1, 2, 3\}$، $B\backslash A = \{7, 8, 9\}$، وبالتالى فإن $A \oplus B = [1, 2, 3, 7, 8, 9\}$.



الفرق المتماثل $A\oplus B$ مظلل

شكل 1-6

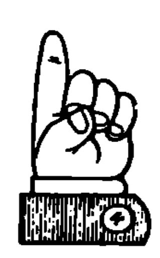
الشكل 1-6 يوضح مخطط ڤن حيث $A \oplus B$ مظلل.

جبر الفئات والثُنائية Algebra of Sets and Duality

الفئات مع عمليات الاتحاد والتقاطع والمتمم تحقق عدة قوانين أو متطابقات مُسجلة فى الجدول 1-1. فى الحقيقة نصوغ ذلك شكليًا كالآتى:

نظرية 1.3: الفئات تحقق القوانين التى فى الجدول 1-1.

وتتلخص إحدى طرق إثبات المعادلات التى تحتوى علـى عمليـات علـى الفئات فى استخدام معنى انتماء عنصر ما x إلى كــل من جـانبى المعادلـة. تستخدم أشكال قن كمرشد لتوضيح هذه الحجة. وثمة طريقة أخـرى للبرهان باستخدام المتطابقات، فمثلاً يمكن إثبات النظرية التالية $(A \setminus B)^c = A^c \cup B$ كالآتى:



$$
\begin{aligned}
(A \setminus B)^c &= \left(A \cap B^c\right)^c \\
&= A^c \cup B^{cc} \\
&= A^c \cup B
\end{aligned}
$$

جدول 1-1 قوانين جبر الفئات

Idempotent laws قوانين الرسوخ	
(1a) $A \cup A = A$	(1b) $A \cap A = A$
Associative laws قوانين الدمج	
(2a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	(2b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Commutative laws قوانين التبديل	
(3a) $A \cup B = B \cup A$	(3b) $A \cap B = B \cap A$
Distributive laws قوانين التوزيع	
(4a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(4b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identity laws قوانين التطابق	
(5a) $A \cup \varnothing = A$	(5b) $A \cap U = A$
(6a) $A \cup U = U$	(6b) $A \cap \varnothing = \varnothing$
Involution laws قوانين الالتفاف	
(7) $(A^c)^c = A$	
Complement laws قوانين التمام	
(8a) $A \cup A^c = U$	(8b) $A \cap A^c = \varnothing$
(9a) $U^c = \varnothing$	(9b) $\varnothing^c = U$
DeMorgan's laws قوانين دى مورجان	
(10a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	(10b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

الثُنائية Duality

يلاحظ أن المتطابقات فى جدول 1-1 نظمت فى أزواج، مثـلاً $(2a)$ و$(2b)$. ندرس الآن المبدأ الكامن خلف هذا التنظيم. لتكن E معادلة فـى جـبر الفئـات. المعادلة E^* التى نحصل عليـها بتبديـل كـل الرمـوز $\cup$، $\cap$، U و $\varnothing$ فـى E بالرموز $\cap$، $\cup$، $\varnothing$ و U على الترتيب تسمى المعادلة المتبادلة مع المعادلة E. ويلاحظ أن أزواج القوانين فى الجدول 1-1 متبادلة مع بعضها البعض. وهذه حقيقة فى جبر الفئات تسمى مبدأ الثنائية principle of duality، أى أنه إذا كانت أى معادلة E هى متطابقة فإن المعادلة E^* المتبادلـة معـها هـى أيضًـا متطابقة.

الفئات المنتهية، مبدأ العد
Finite Sets, Counting Principle

يقال للفئة أنها منتهية إذا احتوت بالضبط على m مـن العنـاصر المختلفـة حيث m عدد صحيح غير سالب. فى غير هذه الحالة فـإن الفئـة تكـون غـير منتهية (لا نهائية). فمثلاً الفئة الخاليـة $\varnothing$ وفئـة حـروف اللغـة الإنجليزيـة كلتاهما تمثلان فئة منتهية، بينما فئة الأعداد الصحيحة الزوجيـة الموجبـة $\{2, 4, 6, ...\}$ فئة غير منتهية (لا نهائية).

التمثيـل الرمـزى notation $n(A)$ يشـير إلـى عـدد العنـاصر فـى الفئـة المنتهية A.

تمهيدية 1.4: إذا كانت A وB فئتيـن منتـهيتين منفصلتيـن فـإن $A \cup B$ فئـة منتهية

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

البرهان Proof. لعد عناصر $A \cup B$ نعـد أولاً عنـاصر A ونجـد هنـاك $n(A)$ منها. العناصر الأخرى الموجودة فى $A \cup B$ هى العناصر التى تنتمى إلى B وغير موجودة فى A. لكن A وB منفصلتان فلا يوجد عنصـر مـن B موجـود

فى A أى أن هناك $n(B)$ من العناصر فى B ولا توجد فى A. وبالتالى فإن $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

نظرية 1.5: إذا كانت A وB فئتين منتهيتين فإن $A \cup B$ فئة منتهية و

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

يمكن استخدام هذه النتيجة للحصول على صيغة فى حالة 3 فئات.

ملحوظة 1.6: إذا كانت A، B، C فئات منتهية فإن $A \cup B \cup C$ فئة منتهية

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) \\ - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

فصول الفئات، فئات القوى، التجزيئات

Classes of Sets, Power Sets, Partitions

إذا كانت S فئة وأردنا الحديث عن الفئات الجزئية فإننا نتطرق إلى فئة الفئات. فى هذه الحالة حتى لا يحدث اضطراب سوف نستخدم تعبير فصل الفئات أو تجمع الفئات بدلاً من فئة الفئات. إذا أردنا أيضًا أن نعتبر بعض الفئات فى هذا الفصل من الفئات فإننا نتكلم عن فصل جزئى أو تجمع جزئى subclass أو subcollection.

فئات القوى Power Sets

إذا أعطيت الفئة S فيمكن أن نتكلم عن فصل كل الفئات الجزئية من S. هذا الفصل يسمى فئة القوى للفئة S ويرمز له بالرمز Power (S). إذا كانت S فئة منتهية فإن Power(S) تكون منتهية أيضًا وعدد عناصرها هو 2 مرفوعة للقوة $n(S)$ أى أن

$$n(\text{Power}(S)) = 2^{n(S)}$$

التجزيئات Partitions

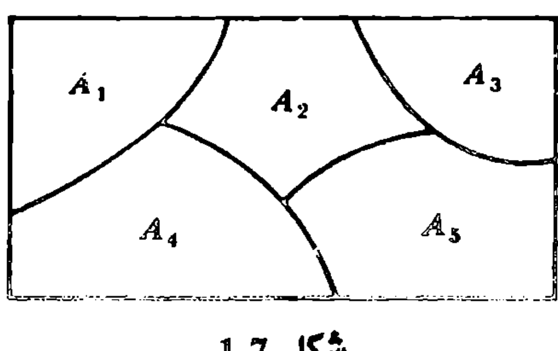
إذا كانت S فئة غير خالية فإن تجزىء S هو تقسيم للفئة S إلى فئات جزئية غير خالية ومنفصلة. بالتحديد، فإن تجزىء الفئة S هو مجموعة Collection $\{A_i\}$ من فئات جزئية غير خالية من S حيث:

(i) كل عنصر $a \in S$ ينتمى إلى واحدة من A_i.

(ii) الفئات من $\{A_j\}$ منفصلة عن بعضها بمعنى:

إذا كان، $A_i \neq A_j$ فإن $A_i \cap A_j = \varnothing$

والفئات الجزئية فى التجزىء partition تسمى خلايا Cells. شكل 7-1 يمثل تخطيط ڤن لتجزىء الفئة التى على شكل مستطيل إلى 5 خلايا A_1، A_2، A_3، A_4 و A_5 .



شكل 7-1

تعميم العمليات على الفئات Generalized Set Operations

لقد تم تعريف عمليات الاتحاد والتقاطع للفئات سابقًا على فئتين فقط، يمكن الآن تعميم هذه العمليات لأى عدد من الفئات سواء كان منتهيًا أو غير منتهى (لا نهائى) كالتالى:

نعتبر أولاً عدداً محدوداً من الفئات A_1، A_2، ...، A_m. الاتحاد والتقاطع لهذه الفئات يرمز له ويعرف كالتالى على الترتيب

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = \cup_{i=1}^{m} A_i = \{x : x \in A_i \text{ for some } A_i\}$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m = \cap_{i=1}^{m} A_i = \{x : x \in A_i \text{ for every } A_i\}$$

أى أن الاتحاد يتكون من تلك العناصر التى تنتمى على الأقــل إلــى واحــدة من الفئات، والتقاطع يتكون من تلك العناصر التى تنتمى إلى كل الفئات.

وإذا كانت A أى مجموعة من الفئات، فإن الاتحاد والتقاطع لعناصر المجموعة A يعرفان ويرمز لهما على الترتيب بـ

$$\cup(A : A \in \mathbf{A}) = \{x : x \in A \text{ for some } A \in \mathbf{A}\}$$
$$\cap(A : A \in \mathbf{A}) = \{x : x \in A \text{ for every } A \in \mathbf{A}\}$$

أى أن الاتحاد يتكون من تلك العناصر التى تنتمى إلى واحدة على الأقل من الفئات فى المجموعة A، والتقاطع يتكون من تلك العناصر التى تنتمى إلــى جميع الفئات فى المجموعة A.

الفصل الثانى
الدوال والخوارزميات
Functions and Algorithms

فى هذا الفصل:

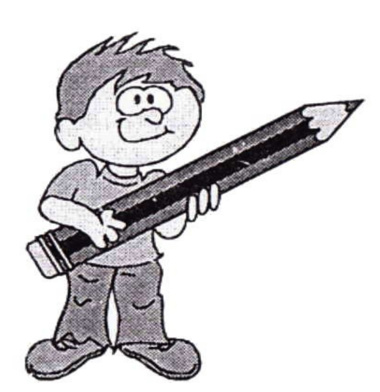
- ✔ الدوال
- ✔ الدوال واحد لواحد (المتباينة)، الدوال الفوقية (الغامرة) والدوال المنعكسة
- ✔ الدوال الرياضية؛ الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية
- ✔ المتتابعات والفصول المفهرسة للفئات
- ✔ الدوال المعرفة تكراريًا
- ✔ الخوارزميات والدوال

الدوال Functions

إذا قمنا بتعيين، لكل عنصر فى الفئة A، عنصرًا وحيدًا من الفئة B فإن مجموعة هذه التعيينات تسمى دالة function من الفئة A إلى الفئة B. الفئة A تسمى نطاق تعريف domain الدالة والفئة B تسمى النطاق المصاحب codomain للدالة.

ويرمز عادة للدوال برموز. فمثلاً ليكن f رمز دالة من A إلى B. نكتب

$$f: A \to B$$



وتقرأ "f دالة من A إلى B" أو "f تنقل (أو تصور) A إلى B". إذا كان $a \in A$ فإن $f(a)$ وتقرأ "f of a" ترمز للعنصر الوحيد فى B الـذى تعينـه f للعنصـر a ويسمى image صـورة a تحـت تـأثير f أو قيمـة f عند a. فئة كل الصـور تسـمى range مــدى أو صورة f. صورة الدالة $f: A \to B$ يرمز لها $\text{Ran}\,(f)$ أو $\text{Im}\,(f)$ أو $f(A)$.

من المعروف أنه يعبر عن الدالة بصيغة رياضية. فمثلاً، نعتبر الدالة التـى تنقل كل عدد حقيقى إلى مربع هذا العدد. يمكن وصف هذه الدالة بكتابة

$$f(x) = x^2 \quad \text{أو} \quad y = x^2$$

فى التعريف الأول x هو المتغير والحرف f يرمز للدالة. فى التعريف الآخـر x هو المتغير المسـتقل independent variable و y يسـمى المتغـير التـابع dependent variable حيث أن قيم y تعتمد على قيمة x.

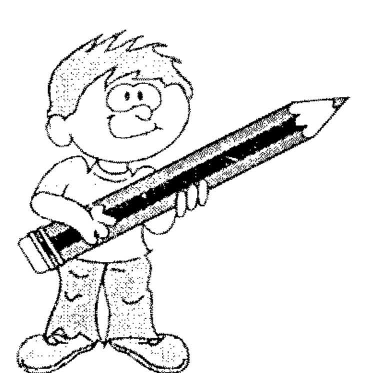
تنبيه

عندما تعطى الدالة بواسطة صيغة بدلالة المتغير x، فإننـا نفـترض أن نطـاق تعريف الدالة هو **R** (ما لم يذكر غير ذلك) أو أكـبر فئـة جزئيـة مـن **R** تجعل الصيغة معرفة (ذات معنى) وأيضًا النطاق المصاحب هو **R**.

الدالة المركبة Composite Function

نعتبر الدوال $f: A \to B$ و $g: B \to C$ حيث النطاق المصـاحب للدالـة f هـو نطاق الدالة g. نعرف دالة جديدة من A إلى C تسمى تركيب (تحصيـل) f و g وتكتب $g \circ f$ كالتالى:

$$(g \circ f)(a) \equiv g(f(a))$$



وتقرأ "f دالة من A إلى B" أو "f تنقل (أو تصور) A إلى B". إذا كان $a \in A$ فإن $f(a)$ وتقرأ "f of a" ترمز للعنصر الوحيد في B الـذي تعينـه f للعنصـر a ويسمى image صـورة a تحـت تـأثير f أو قيمـة f عند a. فئة كل الصـور تسـمى range مـدى أو صورة f. صورة الدالة $f: A \to B$ يرمز لها $\text{Ran}(f)$ أو $\text{Im}(f)$ أو $f(A)$.

من المعروف أنه يعبر عن الدالة بصيغة رياضية. فمثلاً، نعتبر الدالة التـي تنقل كل عدد حقيقي إلى مربع هذا العدد. يمكن وصف هذه الدالة بكتابة

$$y = x^2 \quad \text{أو} \quad f(x) = x^2$$

في التعريف الأول x هو المتغير والحرف f يرمز للدالة. في التعريف الآخـر x هو المتغير المسـتقل independent variable و y يسـمى المتغـير التـابع dependent variable حيث أن قيم y تعتمد على قيمة x.

☆ تنبيه

عندما تعطى الدالة بواسطة صيغة بدلالة المتغير x، فإننـا نفـترض أن نطـاق تعريف الدالة هو $\mathbf{R}$ (ما لم يذكر غير ذلك) أو أكـبر فئـة جزئيـة مـن $\mathbf{R}$ تجعل الصيغة معرفة (ذات معنى) وأيضًا النطاق المصاحب هو $\mathbf{R}$.

الدالة المركبة Composite Function

نعتبر الدوال $f: A \to B$ و $g: B \to C$ حيث النطاق المصـاحب للدالـة f هـو نطاق الدالة g. نعرف دالة جديدة من A إلى C تسمى تركيب (تحصيـل) f و g وتكتب $g \circ f$ كالتالي:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

أى نوجد صورة a بواسطة الدالة f ثم نوجد صورة $f(a)$ باستخدام الدالـــة g.
إذا كانت A أى فئة فإن الدالة من A إلى A التى تعين لكـــل عنصـــر العنصـــر نفسه تسمى دالة التطابق Identity Function على A ويرمز لها بـ I_A أو ببساطة I. بعبارة أخرى

$$I_A(a) = a$$

باعتبار أى دالة $f: A \to B$، فإن

$$f \circ I_A = f \qquad \text{and} \qquad I_B \circ f = f$$

حيث I_A و I_B هما دالتى التطابق على A وB على الترتيب.

الدوال واحد لواحد (المتباينة)، الدوال الفوقية (الغامرة) والدوال المنعكسة

One-to-One, Onto, and Invertible Functions

الدالة $f: A \to B$ يقال لها دالة واحد لواحـــد One-to-One (تكتـــب 1-1) إذا كانت العناصر المختلفة فى النطاق A لها صور مختلفة. وبعبارة أخرى تكون f واحد لواحد إذا كان $f(a) = f(a')$ يستلزم أن $a = a'$

الدالة $f: A \to B$ يقال لها دالة فوقية (غامرة) Onto إذا كان كـل عنصـر من B هو صورة لعنصر ما فى A. وبكلمات أخرى تكون $f: A \to B$ غـامرة (فوقية) onto إذا كانت صورة f هى كل المجال المصاحب، أى أن $f(A) = B$.
ونقول فى هذه الحالة أن f دالة من A على B Onto أو تصور A على B.

الدالة $f: A \to B$ يقال لها منعكســـة Invertible إذا وجـدت دالـة $g: B \to A$ بحيث أن $g \circ f = I_A$، $f \circ g = I_B$. فى الحالة العامة قد لا توجد هذه الدالة (g). لكن إن وجدت فإنها دالة وحيدة ويرمز لها f^{-1}، عندئذ يقـــال أن f منعكســة Invertible. النظرية التالية تعطى معياريًا بسيطًا للقابلية للانعكاس Invertibility.

نظرية 2.1: الدالة $f: A \to B$ منعكسة إذا، وفقط إذا، كانت f واحد لواحد وفوقية معًا.

إذا كانت $f: A \to B$ دالة واحد لواحد وفوقية فإن f تسمى دالة تناظر واحد لواحد one-to-one correspondence بين A وB. هذا التعريف يأتى من حقيقة أنه لكل عنصر فى A يوجد عنصر وحيد مناظر فى B والعكس صحيح أيضًا. كما أن f^{-1} تعكس اتجاه هذا التناظر.

الدوال الرياضية؛ الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

Mathematical Functions; Exponential and Logarithmic Functions

فى هذا البند نقدم الدوال الرياضية التى تظهر كثيرًا فى تحليل الخوارزميات مع الرموز الخاصة بها. ونناقش أيضًا الدوال الأسية واللوغاريتمية والعلاقة بينهما.

دالتا الأرض والسقف Floor and Ceiling Functions

إذا كان x عددًا حقيقيًا فإن x يقع بين عددين صحيحين يسميان أرض وسقف x. بالتحديد،

الدالة $\lfloor x \rfloor$ تسمى أرض floor العدد x وترمز إلى أكبر عدد صحيح لا يزيد عن x.

الدالة $\lceil x \rceil$ تسمى سقف ceiling العدد x وترمز إلى أقل عدد صحيح لا يقل عن x.

فإذا كان x عددًا صحيحًا فإن $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ وفى غير ذلك يكون $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

دالتا الصحيح والقيمة المطلقة Integer and Absolute Value Functions

ليكن x أى عدد حقيقى، فإن دالة صحيح x integer value وتكتب INT(x) تحول x إلى عدد صحيح بحذف الجزء الكسرى fractional من العدد، فمثلاً

$$\text{INT}(3.14) = 3, \quad \text{INT}(\sqrt{5}) = 2, \quad \text{INT}(-8.5) = -8$$

ويلاحظ أن $\text{INT}(x) = \lfloor x \rfloor$ أو $\text{INT}(x) = \lceil x \rceil$ وفقًا لكون x موجبًا أو سالبًا.

القيمة المطلقة absolute value لأى عدد حقيقى x وتكتب $\text{ABS}(x)$ أو $|x|$ تعرف على أنها أكبر القيمتين x أو $-x$. وبالتالى $\text{ABS}(0) = 0$، لقيم $x \neq 0$، $\text{ABS}(x) = x$ أو $\text{ABS}(x) = -x$ وفقًا لكون x موجبًا أو سالبًا.

وعلى ذلك

$$|-15| = 15, \qquad |7| = 7, \qquad |-3.33| = 3.33$$

ونلاحظ أن $|x| = |-x|$ ولقيم $x \neq 0$ فإن $|x|$ موجبة.

دالة الباقى والحساب المقياسى

Remainder Function; Modular Arithmetic

إذا كان k أى عدد صحيح وكان M عدداً صحيحًا موجبًا فإن

$$k \text{ (mod M)}$$

وتقرأ k مقياس M ترمز إلى العدد r الصحيح الباقى من قسمة k على M، وبعبارة أدق $k \text{ (mod } M)$ هو العدد الصحيح الوحيد r حيث

$$k = Mq + r \qquad \text{where} \quad 0 \leq r < M$$

إذا كان k موجبًا فإننا نقسم k على M لنحصل على الباقى r. فمثلاً

$$25 \text{ (mod 7)} = 4, \qquad 25 \text{ (mod 5)} = 0, \qquad 35 \text{ (mod 11)} = 2$$

إذا كان k سالبًا فإننا نقسم $|k|$ على M لنحصل على الباقى r'. ويكون $k \text{ (mod } M) = M - r'$ حيث $r' \neq 0$. ولهذا فإن

$$-26 \text{ (mod 7)} = 7 - 5 = 2, \quad -371 \text{ (mod 8)} = 8 - 3 = 5, \quad -39 \text{ (mod 3)} = 0$$

والتعبير (mod) يستخدم أيضًا للدلالة على علاقة التطابق الرياضى والتى تعرف كما يلى

$$a \equiv b \text{ (mod } M) \quad \text{إذا، وفقط إذا، كان } M \text{ يقسم } b - a$$

ويسمى M المقياس modulus، والتعبير $a \equiv b \pmod M$ يقرأ "a تطابق b مقياس M" (a is congruent to b modulo M). وعلاقة التطابق لها الخواص الهامة التالية

$$0 \equiv M \pmod M \qquad \text{و} \qquad a \pm M \equiv a \pmod M$$

الحساب بمقياس *M* *arithmetic modulo M*. يقصد به هنا العمليات الحسابية من جمع وطرح وضرب حيث القيمة الحسابية تبدل بالقيمة المكافئة من الفئة

$$\{0, 1, 2, ..., M-1\}$$

أو من الفئة

$$\{1, 2, 3, ..., M\}$$

الدوال الأسية Exponential Functions

بالرجوع للتعاريف التالية لقوى العدد الصحيح (حيث m عدد صحيح موجب)

$$a^m = a \cdot a \cdots a \ (m \text{ times}), \qquad a^0 = 1, \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

يمكن تعميم هذا المفهوم للقوى الكسرية على الصورة m/n كالآتى:

$$a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

الدالة الأسية للأساس a حيث $a > 0$، $a\, f(x) = a^x$ يمكن أن تعمم لجميع الأعداد الحقيقية x باستخدام النهايات limiting process: $a^x = \lim_{r \to x} a^r$, حيث r عدد كسرى rational number.

الدوال اللوغاريتمية Logarithmic Functions

ترتبط اللوغاريتمات والأسس كالتالى: ليكن b عدداً موجبًا. لوغاريتم أى عدد موجب x بالنسبة للأساس b يكتب

$$\log_b x$$

ويمثل القوة التى يرفع لها العدد b للحصول على x. أى أن

$$b^y = x \quad \text{و} \quad y = \log_b x$$

هما تقريران متكافئان. هذه التقارير تعنى أن $\log_b$ هو عكس الدالة الأسية للأساس b. وعلى ذلك،

$$2^3 = 8 \quad \text{لأن} \quad \log_2 8 = 3 \quad ، \quad 10^2 = 100 \quad \text{لأن} \quad \log_{10} 100 = 2$$

$$2^6 = 64 \quad \text{لأن} \quad \log_2 64 = 6 \quad ، \quad 10^{-3} = 0.001 \quad \text{لأن} \quad \log_{10} 0.001 = -3$$

لأى أساس b يكون

$$b^0 = 1 \quad \text{لأن} \quad \log_b 1 = 0 \quad ، \quad b^1 = b \quad \text{لأن} \quad \log_b b = 1$$

ويلاحظ أن لوغاريتم العدد السالب ولوغاريتم الصفر غير معرفين.

المتتابعات والفصول المفهرسة للفئات

Sequences, Indexed Classes of Sets

المتتابعات والفصول المفهرسة للفئات هما نوعان خاصان من الدوال ولهما التعريف الخاص بهما. فى هذا البند نناقش هذه الأشياء وأيضًا رمز التجمع.

المتتابعات Sequences

المتتابعة هى دالة من الفئة $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ للأعداد الموجبة إلى الفئة A. الرمز a_n يستخدم للدلالة على صورة العدد n. ولذلك فإن المتتابعة يرمز لها كما يلى

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \quad \text{or} \quad \{a_n : n \in \mathbf{N}\} \quad \text{or simply} \quad \{a_n\}$$

أحيانًا يكون نطاق تعريف المتتابعة هو الفئة $\{0, 1, 2, \ldots\}$ من للأعداد الصحيحة غير السالبة بدلاً من $\mathbf{N}$. وفى هذه الحالة نقول إن n تبدأ بالصفر بدلاً من 1.

المتتابعة المنتهية finite sequence على الفئة A هى دالة من الفئة $\{1, 2, .., m\}$ إلى الفئة A ويرمز لها عادة $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$. والمتتابعة المنتهية تسمى أحيانًا قائمة list أو فئة مرتبة من m عنصر (m-tuple).

رمز التجميع ، حاصل الجمع Summation Symbol, Sums

نقدم هنا رمز التجميع Σ (الحرف اليونانى sigma). إذا كانت $a_1, a_2, a_3, \ldots$ متتابعة، فإن حاصلى الجمع

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \text{و} \quad a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

يرمز لهما على الترتيب

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \quad \text{و} \quad \sum_{j=m}^{n} a_j$$

الحرف j فى هذين التعبيرين يسمى الدليل الوهمى dummy index أو المتغير الوهمى dummy variable.

الفصول المفهرسة للفئات Indexed Classes of Sets

إذا كانت I أى فئة غير خالية وكانت S مجموعة من الفئات، فإن دالة الفهرسة indexing function من I إلى S هى دالة $f : I \to S$. لأى عنصر $i \in I$ إذا رمزنا للصورة $f(i)$ بالرمز A_i فإن دالة الفهرسة f يمكن أن يرمز لها

$$\{A_i : i \in I\} \quad \text{أو} \quad \{A_i\}_{i \in I} \quad \text{أو ببساطة} \quad \{A_i\}$$

تسمى الفئة I فئة الفهرسة indexing set وعناصر I أدلة indices. إذا كانت f دالة واحد لواحد وفوقية فإننا نقول إن S مفهرسة باستخدام I.

الدوال المعرفة تكراريًا Recursively Defined Functions

الدالة المعرفة على فئة من الأعداد الصحيحة يقال لها دالة معرفة تكراريًا إذا كان تعريف الدالة يرجع إلى نفسه. وحتى لا يكون التعريف دائريًا فإن تعريف الدالة

يجب أن يكون له الخاصيتان التاليتان:

1. يجب أن يكون هناك متغيرات arguments ما تسمى القيم الأساسية base values لا ترجع فيها الدالة إلى نفسها.
2. فى كل مرة ترجع فيها الدالة إلى نفسها يجب أن يكون متغير الدالة أقرب إلى إحدى القيم الأساسية.

والدالة التكرارية مع هاتين الخاصيتين يقال أنها معرفة تعريفًا محكمًا well-defined. الأمثلة التالية توضح هذه المعانى.

دالة المضروب **Factorial Function**

حاصل ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة من 1 إلى n شاملاً inclusive يسمى مضروب n "n factorial" وعادة يرمز له $n!$؛ أى أن

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2)(n-1)n$$

حتى تكون الدالة معرفة لجميع الأعداد الصحيحة غير السالبة، نعرف $0! = 1$. وبالتالى

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2 \cdot 1 = 2, \quad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, \quad 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

وهكذا، يلاحظ أن

$$5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120 \quad و \quad 4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$$

وهذا صحيح لكل عدد صحيح موجب n، أى أن

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

وبالتالى يمكن تعريف دالة المضروب أيضًا كالتالى:

تعريف 2.1 (دالة المضروب)

(a) إذا كانت $n = 0$ فإن $n! = 1$.

(b) إذا كانت $n > 0$ فإن $n! = n.(n-1)!$.

ونلاحظ أن هذا التعريف للدالة $n!$ هو تعريف تكرارى حيث أنه يرجع إلى نفسه ويستخدم $(n-1)!$. على أية حال:

1. قيمة $n!$ معطاة صراحة عند $n = 0$ (أى أن 0 هو قيمة أساسية).
2. قيمة $n!$ لأى عدد n معرفة باستخدام القيمة الأصغر من n والتى هى أقرب من القيمة الأساسية 0.

وبذلك تكون دالة المضروب معرفة تعريفًا محكمًا well-defined.

متتابعة فيبوناتشي Fibonacci Sequence

متتابعة فيبوناتشي المشهورة ويرمز لها بـ $(F_0, F_1, F_2, \ldots)$، هى:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

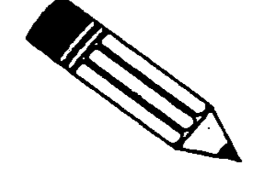
أى أن $F_0 = 0$، $F_1 = 1$ وكل حدٍ تالٍ هو مجموع الحدين السابقين له. وعلى سبيل المثال فالحدين التاليين للمتتابعة هما

$$34 + 55 = 89 \quad \text{و} \quad 55 + 89 = 144$$

والصياغة الشكلية لهذه الدالة كالآتى:



تعريف 2.2 (متتابعة فيبوناتشي)



(a) إذا كانت $n = 0$ أو $n = 1$ فإن $F_n = n$

(b) إذا كانت $n > 1$ فإن $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$

وهذا مثال آخر للتعريف التكرارى، حيث التعريف يعود إلى نفسه عند استعمال F_{n-2} و F_{n-1}. وعلى أية حال

1. القيم الأساسية هى 0 و1.
2. قيمة F_n تعرف باستخدام حدود لقيم أصغر من n والتى تكون أقرب إلى القيم الأساسية.

وبالتالى فهذه الدالة معرفة تعريفًا محكمًا well-defined.

دالة أكِرْمان Ackermann Function

دالة أكِرْمان هى دالة فى متغيرين كل منهما يتعين بالأعداد الصحيحة غير السالبة ... ,0, 1, 2. وتعريف هذه الدالة كالتالى:

تعريف 2.3 (دالة أكِرْمان)

(*a*) إذا كانت $m = 0$ فإن $A(m, n) = n + 1$.

(*b*) إذا كانت $m \neq 0$ لكن $n = 0$ فإن $A(m, n) = A(m - 1, 1)$.

(*c*) إذا كانت $m \neq 0$، $n \neq 0$ فإن $A(m, n) = A(m - 1, A(m, n - 1))$.

مرة أخرى، هذه دالة تكرارية حيث التعريف يرجع إلى نفسه فى الأجزاء (*b*)، (*c*). يلاحظ أن $A(m, n)$ تعطى صراحةً فقط عندما $m = 0$. والمعايير الأساسية هى الأزواج

$$(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), \ldots, (0,n), \ldots$$

وعلى الرغم من عدم وضوح ذلك من التعريف، فإن قيمة أى $A(m, n)$ يمكن التعبير عنها فى آخر الأمر بواسطة قيم الدالة عند واحد أو أكثر من الأزواج الأساسية.

الخوارزميات والدوال Algorithms and Functions

الخوارزمية M هى قائمة منتهية من الأوامر المتتالية (خطوة بخطوة) المعرفة تعريفًا محكمًا لحل مسألة معينة. مثلاً، لإيجاد الخارج output $f(x)$ لدالة f لها الداخل input x (x يمكن أن تكون قائمة أو فئة من القيم). من الشائع أن يكون هناك أكثر من طريقة للحصول على $f(x)$، كما هو موضح بالأمثلة التالية.

مثال 2.1 تعيين قيمة **كثيرة الحدود** عند نقطة. لتكن $f(x)$ كثيرة حدود معطاة، ولتكن $x = a$ القيمة المطلوب إيجاد $f(a)$ عندها.

Example 2.1 (Polynomial Evaluation) Suppose, for a given polynomial $f(x)$ and value $x = a$, we want to find $f(a)$, say

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 15 \quad \text{and} \quad a = 5$$

يمكن الحصول على المطلوب بطريقتين:

(*a*) **الطريقة المباشرة Direct Method**: فى هذه الحالة نعوض بالقيمة $x = 5$ مباشرة فى كثيرة الحدود لنحصل على

$$f(5) = 2(125) - 7(25) + 4(5) - 15 = 250 - 175 + 20 - 15 = 80$$

نلاحظ وجود عدد $3 + 2 + 1 = 6$ عمليات ضرب وعدد 3 عمليات جمع. وفى الحالة العامة يتطلب إيجاد قيمة كثيرة حدود من الدرجة n مباشرة عدد

$$n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

من عمليات الضرب وعدد n من عمليات الجمع تقريبًا.

(*b*) **طريقة هورنر Horner's Method**: نعيد كتابة كثيرة الحدود بأخذ x عامل مشترك من جهة اليمين على التوالى:

$$f(x) = (2x^2 - 7x + 4)x - 15 = ((2x - 7)x + 4)x - 15$$

فيكون

$$f(5) = ((3)5 + 4)5 - 15 = (19)5 - 15 = 95 - 15 = 80$$

ويلاحظ وجود عدد 3 عمليات ضرب و3 عمليات جمع. وعمومًا إيجاد قيمة كثيرة الحدود من الدرجة n بطريقة هورنر سوف يتطلب

n multiplications and n additions

n عمليات ضرب و n عمليات جمع

ومن ذلك يتضح أن طريقة هورنر أكثر كفاءة من الطريقة المباشرة تقريبًا.

مثال 2.2 (**القاسم المشترك الأعظم**) يرمز له (GCD) ليكن a وb عددين صحيحين موجبين $a > b$ مثلاً. المطلوب إيجاد $d = \text{GCD}(a,b)$ القاسم المشترك الأعظم لـ a وb. يمكن عمل هذا بطريقتين:

Example 2.2 (Greatest Common Divisor) Let a and b be positive integers with, say, $b < a$; and suppose we want to find $d = \text{GCD}(a,b)$, the greatest common divisor of a and b. This can be done in the following two ways:

(*a*) **الطريقة المباشرة Direct Method**: هنا نوجـد جميـع قواسـم العـدد a باختبار الأعداد من 2 حتـى $a/2$، وكذلـك جميـع قواسـم العـدد b. ثـم نختار القاسم المشترك الأعظم كما فى المثال التالى. نفـرض $a = 258$ و$b = 60$. قواسم a وb هى:

$a = 258$; divisors: 1, 2, 3, 6, 86, 129, 258
$b = 60$; divisors: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

وبذلك يكون $d = \text{GCD}(258, 60) = 6$.

(*b*) **خوارزمية إقليدس Euclidean Algorithm**: هنا نقسم a علـى b لنحصـل على الباقى r_1 ونلاحظ أن $r_1 < b$ ثم نقسم b على r_1 ونحصل على البـاقى r_2 ونلاحظ أن $r_2 < r_1$. وبعد ذلك نقسم r_1 على r_2 ونحصل على الباقى الثـالث r_3. ونلاحظ أن $r_3 < r_2$. ونستمر فى هذا العمل بقسمة r_k على r_{k+1} فنحصـل على r_{k+2}. ولأن

$$a > b > r_1 > r_2 > r_3 \ \dots$$

فسوف نحصـل فى آخر الأمر علـى باقـى $r_m = 0$. فيكـون $r_{m-1} = \text{GCD}(a,b)$.
فمثلاً، نأخذ $a = 258$ و$b = 60$. ثم

(1) نقسم $a = 258$ على $b = 60$ فيكون الباقى $r_1 = 18$.
(2) نقسم $b = 60$ على $r_1 = 18$ فيكون الباقى $r_2 = 6$.
(3) نقسم $r_1 = 18$ على $r_2 = 6$ فيكون الباقى $r_3 = 0$.

وبذلك يكون r_2 هو القاسم المشترك الأعظم $r_2 = 6 = \text{GCD}(258, 60)$.

مسألة محلولة 2.1 إذا كانت A هى فئة طلبة فـى مدرسـة مـا. حـدد أى مـن التعيينات الآتية تعرف دالة على A.

(*a*) لكل تلميذ نُعين عمره. (*b*) لكل تلميذ نُعين معلمه.
(*c*) لكل تلميذ نُعين نوعه (ذكر أم أنثى).
(*a*) لكل تلميذ نُعين له زوجة (أو زوجته).

Solved Problem 2.1 Let A be the set of students in a school. Determine which of the following assignments defines a function on A.

(*a*) To each student assign his age.
(*b*) To each student assign his teacher.
(*c*) To each student assign his sex.
(*d*) To each student assign his spouse.

الحل: مجموعة التعيينات تكون دالة على A إذا، وفقط إذا، كان كل عنصر a له تعيين وحيد. وبالتالى

(*a*) تمثل دالة لأن كل تلميذ له عمر واحد فقط.

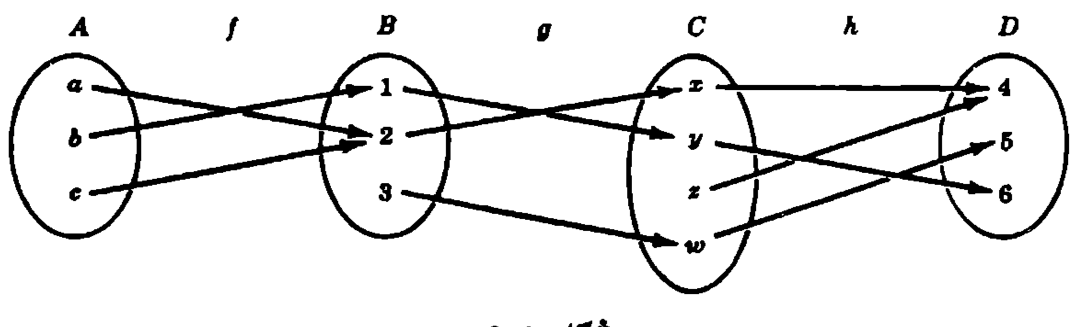
(*b*) تمثل دالة إذا كان كل تلميذ له معلم واحد فقط ولا تمثل دالة إذا كان لأى تلميذ أكثر من معلم.

(*c*) تمثل دالة.

(*d*) لا تمثل دالة، إذا كان أى تلميذ غير متزوج، وتمثل دالة فيما عدا ذلك.

مسألة محلولة 2.2 لتكن الدوال $f: A \rightarrow B$ ، $g: B \rightarrow C$، و$h: C \rightarrow D$ معرفة فى شكل 2-1. عين ما إذا كانت كل دالة هى دالة فوقية onto.

Solved Problem 2.2 Let the functions $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, and $h: C \rightarrow D$ be defined by Figure 2-1. Determine if each function is onto.



شكل 2-1

الحل:

الدالة $f: A \rightarrow B$ ليست فوقية لأن $3 \in B$ ليست صورة لأى من عناصر A.

الدالة $g: B \rightarrow C$ ليست فوقية لأن $z \in C$ ليست صورة لأى عنصر فى B.

الدالة $h: C \rightarrow D$ دالة فوقية لأن كل عنصر من D هو صورة لعنصر أو أكثر من C.

الفصل الثالث

المنطق وحساب التقارير

Logic and Propositional Calculus

في هذا الفصل:

- ✔ التقارير والتقارير المركبة
- ✔ العمليات المنطقية الأساسية
- ✔ القضايا وجداول الصواب
- ✔ الصوابات المنطقية (الصوابات الدائمة) والتناقضات
- ✔ التكافؤ المنطقى
- ✔ جبر القضايا
- ✔ التقارير الشرطية وثُنائية الشرطية
- ✔ الحُجج
- ✔ الدوال التقريرية (القضايا المفتوحة) والأسوار
- ✔ نفى التقارير المسوّرة
- ✔ الاستنتاج الرياضى

التقارير والتقارير المركبة

Propositions and Compound Propositions

التقرير أو القضية statement or proposition هو جملة خبرية يمكن أن تكون صوابًا true أو خطأ false لكن ليس الاثنين معًا. نعتبر مثلاً الجمل الثمانى التالية:

(i) باريس تقع فى فرنسا.

(ii) $1 + 1 = 2$.

(iii) $2 + 2 = 3$.

(iv) لندن تقع فى الدانمارك.

(v) $9 < 6$.

(vi) $x = 2$ هى حل للمعادلة $x^2 = 4$.

(vii) إلى أين أنت ذاهب؟

(viii) اعمل واجبك!

جميعها تقارير، ما عدا (vii) و(viii). أكثر من ذلك (i)، (ii)، و(vi) هى تقارير صائبة بينما (iii)، (iv)، (v) خطأ.

التقارير المركبة Compound Propositions

تقارير كثيرة تكون مركبة composite أى أنها مكونة من تقارير فرعية subpropositions وبعض أدوات الربط المختلفة التى سنتحدث عنها لاحقًا. مثل هذه التقارير تسمى تقاريرًا مركبة compound propositions. التقرير يقال أنه أولى أو بسيط primitive إذا لم يمكن تجزئته إلى تقارير أبسط، أى إذا لم يكن مركبًا composite.

> **ملاحظة**
>
> الخاصية الأساسية للتقارير المركبة هى أن قيمة الصواب لها تحدد تمامًا بقيم الصواب لمكوناتها مع الطريقة التى تم بها ربط هذه التقارير الفرعية لتكوّن التقارير المركبة.

العمليات المنطقية الأساسية Basic Logical Operations

يناقش هذا البند section ثلاث عمليات منطقية أساسية هى العطف (و)

التقارير والتقارير المركبة

Propositions and Compound Propositions

التقرير أو القضية statement or proposition هو جملة خبرية يمكن أن تكون صوابًا true أو خطأ false لكن ليس الاثنين معًا. نعتبر مثلاً الجمل الثمانى التالية:

(i) باريس تقع فى فرنسا.

(ii) $1 + 1 = 2$.

(iii) $2 + 2 = 3$.

(iv) لندن تقع فى الدانمارك.

(v) $9 < 6$.

(vi) $x = 2$ هى حل للمعادلة $x^2 = 4$.

(vii) إلى أين أنت ذاهب؟

(viii) اعمل واجبك!

جميعها تقارير، ما عدا (vii) و(viii). أكثر من ذلك (i)، (ii)، و(vi) هى تقارير صائبة بينما (iii)، (iv)، (v) خطأ.

التقارير المركبة Compound Propositions

تقارير كثيرة تكون مركبة composite أى أنها مكونة من تقارير فرعية subpropositions وبعض أدوات الربط المختلفة التى سنتحدث عنها لاحقًا. مثل هذه التقارير تسمى تقاريرًا مركبة compound propositions. التقرير يقال أنه أولى أو بسيط primitive إذا لم يمكن تجزئته إلى تقارير أبسط، أى إذا لم يكن مركبًا composite.

ملاحظة

الخاصية الأساسية للتقارير المركبة هى أن قيمة الصواب لها تحدد تمامًا بقيم الصواب لمكوناتها مع الطريقة التى تم بها ربط هذه التقارير الفرعية لتكوّن التقارير المركبة.

العمليات المنطقية الأساسية Basic Logical Operations

يناقش هذا البند section ثلاث عمليات منطقية أساسية هى العطف (و)

conjunction، الفصل (أو) disjunction والنفى (ليس) negation والتى تناظر على الترتيب فى اللغة الإنجليزية الكلمات "and"، "or"، "not".

العطف $p \wedge q$ **Conjunction $p \wedge q$**

أى تقريرين يمكن ضمهما معًا بكلمة (و) (and) لتكوين تقرير مركب يسمى معطوف conjunction التقريرين الأصليين، ويرمز له بالرمز

$$p \wedge q$$

ويُقرأ "p و q"

ولأن $p \wedge q$ تقرير فله قيمة صواب. وقيمة الصواب هذه تعتمد فقط على قيم الصواب لكل من p و q. وبصورة أدق:

تعريف 3.1 إذا كان كل من p و q صواب فإن $p \wedge q$ يكون صوابًا، وفيما عدا ذلك يكون $p \wedge q$ خطأ.

كذلك يمكن تعريف قيم الصواب للتقرير $p \wedge q$ بالجدول فى شكل 3-1(*a*). السطر الأول فى هذا الجدول هو طريقة مختصرة لقول "إذا كان p صوابًا و q صوابًا فإن $p \wedge q$ صواب". السطر الثانى يقول أنه "إذا كان p صوابًا و q خطأ فإن $p \wedge q$ خطأ". وهكذا، يلاحظ وجود أربعة أسطر تناظر الأربعة تركيبات الممكنة من T وF للتقارير الفرعية p و q. يلاحظ أن $p \wedge q$ صواب فقط عندما يكون كل من p و q صوابًا.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

(*a*) "p and q"
p و q

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(*b*) "p or q"
p أو q

p	$\neg p$
T	F
F	T

(*c*) "not p"
نفى p

شكل 3-1

الفصل $p \vee q$ — Disjunction $p \vee q$

أى تقريرين يمكن ربطهما معًا بكلمة (أو) (or) لتكوين تقرير مركب يسمى فصل disjunction التقريرين الأصليين ويرمز له بالرمز

$$p \vee q$$

ويقرأ "p أو q". قيمة الصواب للتقرير $p \vee q$ تعتمد فقط على قيم الصواب للتقريرين p وq كالآتى:

تعريف 3.2 إذا كان كل من p وq خطأ فإن $p \vee q$ يكون خطأ وفيما عدا ذلك فإن $p \vee q$ صواب.

قيم الصواب للتقرير $p \vee q$ تعطى أيضًا من الجدول فى شكل 3-1(b). يلاحظ أن $p \vee q$ يكون خطأ فقط فى الحالة الرابعة عندما يكون كل من p و q خطأ.

> ☆ **هـام**
>
> الكلمة الإنجليزية "or" عادة تستخدم بطريقتين مختلفتين. أحيانًا تستخدم بمعنى p أو q أو كليهما أى أحد البديلين على الأقل يحدث كما فى السابق. وأحيانًا تستخدم بمعنى p أو q وليس كليهما أى يحدث واحد فقط من البديلين. إذا لم يذكر خلاف ذلك فإننا نستخدم المعنى الأول .

النفى $\neg p$ — Negation $\neg p$

إذا أعطيت أى تقرير p، يمكن تكوين تقرير آخر يسمى نفى التقرير p وذلك بكتابة "إنها ليست الحالة ..." أو "من الخطأ أن يكون ..." قبل p أو، إذا أمكن ذلك، بإدخال كلمة "ليس" (not) فى p ويُرمز لنفى p بالرمز

$$\neg p$$

Disjunction $p \vee q$ **الفصل $p \vee q$**

أى تقريرين يمكن ربطهما معًا بكلمة (أو) (or) لتكوين تقرير مركب يسمى فصل disjunction التقريرين الأصليين ويرمز له بالرمز

$$p \vee q$$

ويقرأ "p أو q". قيمة الصواب للتقرير $p \vee q$ تعتمد فقط على قيم الصواب للتقريرين p وq كالآتى:

تعريف 3.2 إذا كان كل من p وq خطأ فإن $p \vee q$ يكون خطأ وفيما عدا ذلك فإن $p \vee q$ صواب.

قيم الصواب للتقرير $p \vee q$ تعطى أيضًا من الجدول فى شكل 3-1(b). يلاحظ أن $p \vee q$ يكون خطأ فقط فى الحالة الرابعة عندما يكون كل من p و q خطأ.

☆ هـــام

الكلمة الإنجليزية "or" عادة تستخدم بطريقتين مختلفتين. أحيانًا تستخدم بمعنى p أو q أو كليهما أى أحد البديلين على الأقل يحدث كما فى السابق. وأحيانًا تستخدم بمعنى p أو q وليس كليهما أى يحدث واحد فقط من البديلين. إذا لم يذكر خلاف ذلك فإننا نستخدم المعنى الأول .

Negation $\neg p$ **النفى $\neg p$**

إذا أعطيت أى تقرير p، يمكن تكوين تقرير آخر يسمى نفى التقرير p وذلك بكتابة "إنها ليست الحالة ..." أو "من الخطأ أن يكون ..." قبل p أو، إذا أمكن ذلك، بإدخال كلمة "ليس" (not) فى p ويُرمز لنفى p بالرمز

$$\neg p$$

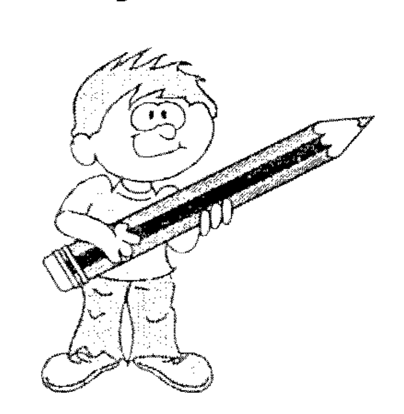
وتُقرأ "ليس p" (not p). قيم الصواب لـ ($\neg p$) تعتمد على قيم الصواب لـ p على النحو التالى:

تعريف 3.3 إذا كان p صوابًا فإن $\neg p$ يكون خطأ، وإذا كان p خطأ فإن $\neg p$ يكون صوابًا.

قيم الصواب للتقرير ($\neg p$) موضحة فى الجدول 3.1(c). لذلك فإن قيمة نفى التقرير (p) تكون دائمًا عكس قيمة الصواب للتقرير (p).

القضايا وجداول الصواب

Propositions and Truth Tables



ليكن $P(p, q, \ldots)$ تعبيرًا مكونًا من متغيرات منطقية $p, q, \ldots$ تأخذ القيم صواب TRUE (T) أو خطأ FALSE (F) مع أدوات الربط $\wedge$، $\vee$، $\neg$ وأدوات ربط أخرى سيأتى ذكرها فيما بعد. يسمى التعبير $P(p, q, \ldots)$ قضية.

الخاصية الأساسية للقضية $P(p, q, \ldots)$ هى أن قيمة الصواب لها تعتمد فقط على قيم الصواب للمتغيرات $p, q, \ldots$؛ أى أن قيمة الصواب للقضية $P(p, q, \ldots)$ تعرف عندما تعرف قيمة الصواب لكل من متغيراتها $p, q, \ldots$. والطريقة البسيطة المختصرة لتوضيح هذه العلاقة تكون من خلال جدول الصواب. نصف فيما يلى طريقة إيجاد جداول الصواب.

نعتبر مثلاً $\neg(p \wedge \neg q)$. شكل 3-2(a) يوضح كيفية تكوين جدول الصواب لـ $\neg(p \wedge \neg q)$. لاحظ أن الأعمدة الأولى للجدول هى للمتغيرات المنطقية $p, q, \ldots$، وأنه يوجد عدد من الصفوف كافٍ فى الجدول لتمثيل جميع التوافيق الممكنة من T وF لهذه المتغيرات. فى حالة متغيرين اثنين

كما فى السابق يلزم وجود 4 صفوف، وفى حالـة 3 متغـيرات يلـزم وجـود 8 صفوف، وعامة فى حالة n من المتغيرات فإن عدد الصفـوف الـلازم هـو 2^n. بالتالى يوجد عمود لكل مرحلة بسيطة فى تكوين القضية. قيمة الصواب عند كل خطوة تعين من الخطوات السابقة لها ومن تعاريف الروابط $\wedge$، $\vee$، $\neg$ وفى النهاية نحصل على قيمة الصواب للقضية فى العمود الأخير من الجدول.

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

(*a*)

p	q	$\neg(p \wedge \neg q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(*b*)

شكل 3-2

لتحاشى زيادة عدد الأقواس، نرتب أسبقية تطبيق الروابط المنطقية. تحديدًا $\neg$ أولاً ثم $\wedge$ ثم $\vee$.

مثلاً $\neg p \wedge q$ تعنى $(\neg p) \wedge q$ وليس $\neg (p \wedge q)$

الصوابات المنطقية (الصوابات الدائمة) والتناقضات
Tautologies and Contradictions

بعض القضايا $P(p, q, \ldots)$ تحوى فـى العمـود الأخـير مـن جـدول الصـواب القيمة T فقط. وبعبارة أخرى، هذه الصيغ تكون صوابًا دائمًا لأى قيم صواب لمتغيراتها المنطقية $p, q, \ldots$. هذه الصيغ تسمى صوابات منطقيـة tautologies. وبالمثل القضايا $P(p, q, \ldots)$ تسمى تناقضات contradictions إذا احتوت فى جدول الصواب قيمة F فقط فى العمود الأخير. وبعبارة أخـرى، تكـون هـذه الصيغة خطأ لأى قيم صواب لمتغيراتها $p, q, \ldots$. فمثلاً التقرير $(p \vee \neg p)$ هو صواب منطقى ولكن $(p \wedge \neg p)$ هو تناقض. ويتحقـق ذلـك بمراجعـة جـدول

الصواب فى شكل 3-3. (جداول الصواب تحتوى على صفين فقط لأن كل قضية تحتوى على متغير واحد فقط) .

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

$(a)\ p \vee \neg p$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

$(b)\ p \wedge \neg p$

شكل 3-3

نلاحظ أن نفى الصواب المنطقى هو تناقض لأنه دائمًا خطأ. وأيضًا نفى التناقض هو صواب منطقى لأنه دائمًا صواب.

والآن ليكن $P(p, q, \ldots)$ صوابًا منطقيًا $P_1(p, q, \ldots)$، $P_2(p, q, \ldots)$، أى قضايا. بما أن $P(p, q, \ldots)$ لا تعتمد على قيم الصواب الخاصة بمتغيراتها $p, q, \ldots$ يمكننا أن نعوض بـ P_1 بدلاً من p، ونعوض بـ P_2 بدلاً من q، ... فى الصواب المنطقى $P(p, q, \ldots)$ وما زلنا نحتفظ بالصواب المنطقى بعد التعويض. وبعبارة أخرى:

نظرية 3.1 مبدأ التعويض Principle of Substitution إذا كان $P(p, q, \ldots)$ صوابًا منطقيًا فإن القضية $P(P_1, P_2, \ldots)$ تكون صوابًا منطقيًا لأى قضايا $P_1, P_2, \ldots$.

التكافؤ المنطقى Logical Equivalence

القضيتان $P(p, q, \ldots)$ ، $Q(p, q, \ldots)$ يقال لهما متكافئتان منطقيًا أو متساويتان ويرمز لذلك بالرمز

$$P(p, q, \ldots) \equiv Q(p, q, \ldots)$$

إذا تطابق جدولا الصواب لهما. نعتبر مثلاً جدول الصواب للقضيتين

$\neg(p \wedge q)$، $\neg p \vee \neg q$ فـــى شكـل 3-4. يلاحـظ أن للتقريريـن نفـس جـدول الصواب بمعنى أن التقريرين خطأ فى الحالة الأولى وصواب فى باقى الثلاث حالات. وعليه يمكننا كتابة

$$(\neg p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

أى أن القضيتين متكافئتان منطقيًا.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

(a) $\neg(p \wedge q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

(b) $\neg p \vee \neg q$

شكل 3-4

جدول الصواب الفعلى للتقرير $\neg(p \vee \neg q)$ موضح بشكل 3-4(b). وهو يتكون بالضبط من أعمدة الجدول 3-4(a) التى تظهر تحت المتغيرات وتحت القضية المنطقية. الأعمدة الأخرى استخدمت فقط لتكوين جدول الصواب.

جبر القضايا Algebra of Propositions

تحقق القضايا عـدة قوانيـن، أوردناهـا فـى جـدول 3-1 (فـى هـذا الجـدول T وF يرمزان لقيم الصواب، صواب وخطأ على الترتيب). ونذكر هذه النتيجة فيما يلى.

نظرية 3.2 تحقق القضايا القوانين المذكورة فى جدول 3-1.

جدول 3-1 قوانين جبر القضايا

Idempotent laws (قوانين الرسوخ)	
(1a) $p \vee p \equiv p$	(1b) $p \wedge p \equiv p$
Associative laws (قوانين الدمج)	
(2a) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	(2b) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Commutative laws (قوانين التبديل)	
(3a) $p \vee q \equiv q \vee p$	(3b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$
Distributive laws (قوانين التوزيع)	
(4a) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(4b) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Identity laws (قوانين التطابق)	
(5a) $p \vee \mathrm{F} \equiv p$	(5b) $p \wedge \mathrm{T} \equiv p$
(6a) $p \vee \mathrm{T} \equiv \mathrm{T}$	(6b) $p \wedge \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$
Complement laws (قوانين التمام)	
(7a) $p \vee \neg p \equiv \mathrm{T}$	(7b) $p \wedge \neg p \equiv \mathrm{F}$
(8a) $\neg \mathrm{T} \equiv \mathrm{F}$	(8b) $\neg \mathrm{F} \equiv \mathrm{T}$
Involution law (قانون الالتفاف)	
(9) $\neg \neg p \equiv p$	
DeMorgan's laws (قوانين دى مورجان)	
(10a) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	(10b) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

التقارير الشرطية وثُنائية الشرطية

Conditional and Biconditional Statements

العديد من التقارير وخاصة فى الرياضيات لها الشكل "إذا كان p فـإن q". مثل هذه التقارير تسمى تقارير شرطية أو استلزامات ويرمز لها بالرمز

$$p \rightarrow q$$

الاستلزام $p \rightarrow q$ يقرأ عادة "p يستلزم q" أو "p فقط إذا كان q".

هناك تقرير آخر شائع له الشكل "p إذا وفقط إذا كان q". هذا التقرير يسمى تقريرًا ثنائى الشرطية ويرمز له بالرمز

$$p \leftrightarrow q$$

قيم الصواب لكل من $p \rightarrow q$ و $p \leftrightarrow q$ معرفة بالجداول فى شكل 3-5. يلاحظ أن:

(a) الاستلزام $p \rightarrow q$ يكون خاطئًا فقط إذا كان الجزء الأول p صوابًا والجزء الثانى q خطأ. وعلى ذلك إذا كان p خطأ فإن الاستلزام $p \rightarrow q$ يكون صوابًا مهما كانت قيمة الصواب لـ q.

(b) ثنائى الشرطية $p \leftrightarrow q$ يكون صوابًا عندما يكون p وq لهما نفس قيم الصواب ويكون خطأ فى غير ذلك.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(a) $p \rightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

(b) $p \leftrightarrow q$

شكل 3-5

جدول الصواب للتقرير $\neg p \vee q$ يظهر فى شكل 3-6. يلاحظ أن جداول الصواب للتقريرين $\neg p \vee q$ و $p \rightarrow q$ لها نفس العمود الأخير، أى أنهما خطأ فقط فى الحالة الثانية، وبالتالى $p \rightarrow q$ يكافئ منطقيًا $\neg p \vee q$ أى أن

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

$\neg p \vee q$

شكل 3-6

وبعبارة أخرى، التقرير المشروط "إذا كان p فإن q" مكافئ منطقيًا التقرير "ليس p أو q" والذى يحتوى فقط على الروابط $\vee$، $\neg$ (أو و ليس) وهو جزء من اللغة المستخدمة. يمكن النظر إلى $p \rightarrow q$ كاختصار لتقرير يتكرر كثيرًا.

الحُجج Arguments

الحُجة هى تأكيد على أن فئة معطاة من القضايا $P_1, P_2, \ldots, P_n$، والتى تسمى فروضًا premises، تُنتج قضايا أخرى Q تسمى النتيجة conclusion. هذه الحجة يرمز لها بالرمز

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$$

مفهوم "الحجة المنطقية" أو "الحجة الصحيحة" يصاغ كالتالى:

تعريف 3.4: الحجة $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ يقال أنها صحيحة إذا كانت Q صوابًا عندما تكون جميع الفروض premises $P_1, P_2, \ldots, P_n$ صوابًا.

تذكر !

الحجة غير الصحيحة تسمى مغالطة "a fallacy".

القضايا $P_1, P_2, \ldots, P_n$ تكون صوابًا آنية إذا، وفقط إذا، كانت القضية $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ صوابًا. وبالتالى فالحجة $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ صحيحة إذا، وفقط إذا، كان Q صوابًا عندما تكون $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ صوابًا، أى إذا كانت القضية $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$ صوابًا منطقيًا كما يلى:

نظرية 3.3: الحجة $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ صحيحة إذا، وفقط إذا، كان التقرير $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$ صوابًا منطقيًا tautology.

الدوال التقريرية (القضايا المفتوحة) والأسوار
Propositional Functions, Quantifiers

لتكن A فئة معطاة. الدالة التقريرية propositional function (أو الجملة المفتوحة أو الشرط المفتوح) المعرفة على A هى تعبير $p(x)$ له الخاصية أن

$p(a)$ صواب أو خطأ لكل $a \in A$. ويعنى هذا أن $p(x)$ تصبح تقريرًا (وله قيمة صواب) عندما يعوض أى عنصر $a \in A$ بدلاً من المتغير x. الفئة A تسمى نطاق تعريف $p(x)$، والفئة T_p المكونة من جميع عناصر A التى تجعل $p(a)$ صوابًا تسمى مجموعة الصواب Truth Set لـ $p(x)$. أى أن

$$T_p = \{x: x \in A, p(x) \text{ is true}\} \quad \text{or} \quad T_p = \{x: p(x)\}$$

من الشائع أنه عندما تكون A فئة أعداد، فإن الشرط $p(x)$ يكون على شكل معادلة أو متباينة تحتوى المتغير x.

سور الشمول Universal Quantifier

لتكن $p(x)$ دالة تقريرية معرفة على المجموعة A. التعبير

$$\forall x\, p(x) \quad \text{أو} \quad (\forall x \in A)\, p(x) \tag{3.1}$$

ويقرأ "لكل x فى الفئة A، فإن التقرير $p(x)$ صواب" أو باختصار "لجميع x، $p(x)$". الرمز $\forall$ الذى يقرأ "لكل" أو "لجميع" أو "لأى" ،"for all" "for every" أو "for any" على الترتيب، يسمى سور الشمول universal quantifier. التقرير (3.1) يكافئ التقرير

$$T_p = \{x: x \in A, p(x)\} = A \tag{3.2}$$

أى أن فئة الصواب لـ $p(x)$ هى كل الفئة A.

التعبير $p(x)$ بذاته يمثل جملة مفتوحة أو شرطًا مفتوحًا وبالتالى ليس له قيمة صواب. أما التعبير $\forall x\, p(x)$ ، أى $p(x)$ مسبوقة بالسور $\forall$، لها قيمة صواب تنتج من التكافؤ بين (3.1) و(3.2). وبالتحديد

Q_1: إذا كانت الفئة $A = \{x: x \in A, p(x)\}$ فإن التقرير $\forall x\, p(x)$ صحيح

Q_1: If $\{x: x \in A, p(x)\} = A$, *then* $\forall x\, p(x)$ is true.

وفى غير هذه الحالة فإن $\forall x\, p(x)$ خطأ.

سور الوجود Existential Quantifier

لتكن $p(x)$ دالة تقريرية معرفة على الفئة A. التعبير

$$(\exists x \in A)p(x) \quad \text{أو} \quad \exists x\, p(x) \tag{3.3}$$

يُقرأ "يوجد عنصر x في A بحيث: $p(x)$ تقرير صائب" أو باختصار "لبعض x، فإن $p(x)$". الرمز $\exists$ والذى يقرأ "يوجد" أو "لبعض" أو "لعنصر واحد على الأقل" يسمى سور الوجود existential quantifier. التقرير (3.3) يكافئ التقرير

$$T_p = \{x : x \in A, p(x)\} \neq \varnothing \tag{3.4}$$

أى أن فئة الصواب للشرط $p(x)$ غير خالية. وعلى ذلك يكون للتعبير $\exists x\, p(x)$، أى $p(x)$ يسبقها السور $\exists$، جدول صواب. تحديداً

Q_2: إذا كانت الفئة $\{x: p(x)\}$ غير خالية فإن التقرير "يوجد x بحيث $p(x)$" صحيح.

Q_2: If $\{x: p(x)\} \neq \varnothing$, then $\exists x\, p(x)$ is true;

وفى غير ذلك، $\exists x\, p(x)$ خطأ.

نفى التقارير المسوَّرة

Negation of Quantified Statements

نعتبر التقرير "All math majors are male" (كل طلاب الرياضيات من الذكور). نفى هذه العبارة يُقرأ "ليس كل طلاب الرياضيات من الذكور" "It is not the case that all math majors are male" وتكافؤها "يوجد على الأقل طالب واحد رياضيات من الإناث" "There exists at least one math major who is female" وباستخدام الرموز مع أخذ M رمزاً لفئة طلاب الرياضيات يمكن كتابة ما سبق كالتالى

$$\neg(\forall x \in M)(x \text{ is male}) \equiv (\exists x \in M)(x \text{ is not male})$$

أو إذا كانت $p(x)$ ترمز لـ "x ذكر" فإن

$$\neg(\forall x \in M)p(x) \equiv (\exists x \in M)\neg p(x) \quad \text{أو} \quad \neg\forall x\, p(x) \equiv \exists x\, \neg p(x)$$

ما سبق صحيح لأى تقرير $p(x)$. أى أن:

نظرية 3.4 (DeMorgan): $\neg(\forall x \in A)p(x) \equiv (\exists\, x \in A)\neg p(x)$

نفى التقرير "$\forall x \in A$ فإن الخاصية $p(x)$ صحيحة" يكافئ التقرير "توجد $x \in A$ تجعل $p(x)$ غير صحيحة".

وبعبارة أخرى، التقريران التاليان متكافئان:

1. ليس صوابًا أن لكل عنصر $a \in A$ يكون $p(a)$ صوابًا.
2. يوجد عنصر $a \in A$ بحيث أن $p(a)$ خطأ.

1. It is not true that, for all $a \in A$, $p(a)$ is true.
2. There exists an $a \in A$ such that $p(a)$ is false.

توجد نظرية مشابهة لنفى التقارير المحتوية على سور الوجود.

نظرية 3.5 (DeMorgan): $\neg(\exists x \in A)p(x) \equiv (\forall x \in A)\neg p(x)$

أى أن التقريرين التاليين متكافئان:

1. ليس صوابًا أنه يوجد عنصر $a \in A$ بحيث يكون $p(a)$ صوابًا.
2. لكل عنصر $a \in A$ يكون $p(a)$ خطأ.

1. It is not true that, for some $a \in A$, $p(a)$ is true.
2. for all $a \in A$, $p(a)$ is false.

الدوال التقريرية فى أكثر من متغير

Propositional Functions With More Than One Variable

الدالة التقريرية فى n من المتغيرات المعرفة على فئة حاصل الضرب $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ (سوف يأتى التعريف فى فصل 5) هى التعبير

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

وله خاصية أن $p(a_1, a_2, ..., a_n)$ يكون صوابًا أو خطأ لأى نونى مرتب (n-tuple) $(a_1, ..., a_n)$ من A.

مبدأ أساسى Basic Principle: الدالة التقريرية المسبوقة بسور لكل متغير، مثلاً

$$\exists x \forall y \exists z \ p(x,y,z) \quad \text{أو} \quad \forall x \exists y \ p(x,y)$$

ترمز إلى تقرير تكون قيمة صواب.

نفى التقارير المسوّرة فى أكثر من متغير

Negating Quantified Statements with More Than One Variable

التقارير المسورة والمحتوية على أكثر من متغير يمكن أن تنفى باستخدام نظريات 3.4 و3.5 على التتابع: كل $\forall$ يتحول إلى $\exists$ وكل $\exists$ يتحول إلى $\forall$ مع انتقال علامة النفى $\neg$ عبر التقرير من اليسار إلى اليمين. فمثلاً

$$\neg[\forall x \exists y \exists z, p(x,y,z)] \equiv \exists x \neg[\exists y \exists z, p(x,y,z)] \equiv \exists x \forall y[\neg \exists z, p(x,y,z)]$$
$$\equiv \exists x \forall y \forall z, \neg p(x,y,z)$$

الاستنتاج الرياضى Mathematical Induction

هناك خاصية أساسية للفئة

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

تستخدم فى براهين كثيرة وهى كالتالى:

مبدأ الاستنتاج الرياضى I Principle of Mathematical Induction I

لتكن P قضية معرفة على فئة الأعداد الصحيحة الموجبة N؛ أى أن $P(n)$ تكون صوابًا أو خطأ لكل n فى N. لنفرض أن P لها الخاصيتان التاليتان:

(i) $P(1)$ صواب.

(ii) $P(n+1)$ صواب عندما يكون $P(n)$ صوابًا.

(i) $P(1)$ is true.
(ii) $P(n+1)$ is true whenever $P(n)$ is true.

عندئذ تكون P صوابًا لكل عدد صحيح موجب.

توجد صيغة لمبدأ الاستنتاج الرياضى تكون فى كثير من الأحيان أكثر ملائمة عند الاستخدام. وعلى الرغم من الاختلاف فى الشكل فهى فى الحقيقة مكافئة لمبدأ الاستنتاج.

مبدأ الاستنتاج الرياضى II Principle of Mathematical Induction II

ليكن P قضية معرفة على فئة الأعداد الصحيحة الموجبة **N** بحيث أن:

(i) $P(1)$ صواب.

(ii) $P(n)$ صواب عندما يكون $P(k)$ صوابًا لكل $1 \leq k < n$.

(i) $P(1)$ is true.
(ii) $P(n)$ is true whenever $P(k)$ is true for all $1 \leq k < n$.

عندئذ تكون P صوابًا لكل عدد صحيح موجب.

ملحوظة Remark: فى بعض الأحيان نريد أن نثبت أن التقرير P صواب لفئة الأعداد الصحيحة

$$\{a, a+1, a+2, \ldots\}$$

حيث a عدد صحيح (وقد يكون صفرًا). هذا يمكن إثباته بتبديل 1 مع a فى أى من مبدئى الاستنتاج الرياضى السابقين.

مسألة محلولة 3.1 حدد قيمة الصواب لكل من التقارير التالية:

Solved Problem 3.1 Determine the truth value of each of the following statements:

(*a*) $4 + 2 = 5$ and $6 + 3 = 9$
(*b*) $3 + 2 = 5$ and $6 + 1 = 7$
(*c*) $4 + 5 = 9$ and $1 + 2 = 4$
(*d*) $3 + 2 = 5$ and $4 + 7 = 11$

الحل: التقرير "p و q" يكون صوابًا فقط إذا كان كل من p وq صوابًا.
وبالتالى: (a) خطأ، (b) صواب، (c) خطأ، (d) صواب.

مسألة محلولة 3.2 أعد كتابة التقارير التالية بدون استخدام الشرط

(a) إذا كان الجو باردًا فهو يرتدى قبعة.
(b) إذا زادت الإنتاجية ارتفعت الأجور.

Solved Problem 3.2 Rewrite the following statements without using the conditional:

(*a*) If it is cold, he wears a hat.
(*b*) If productivity increases, then wages rise.

الحل: تذكر أن التقرير " إذا كان p فإن q" يكافئ (منطقيًا) (ليس p أو q)
أى $p \to q \equiv \neg p \vee q$ ولهذا نكتب التقارير كالآتى

(a) الجو ليس باردًا أو يرتدى قبعة.
(b) الإنتاج لم يزد أو ارتفعت الأجور.

مسألة محلولة 3.3 حقق أن التقرير $p \vee \neg (p \wedge q)$ هو صواب منطقى.

Solved Problem 3.3 Verify that the proposition $p \vee \neg(p \wedge q)$ is tautology.

الحل: نكوّن جدول الصواب للتقرير $p \vee \neg (p \wedge q)$ كما فى شكل 7-3. بما أن قيمة الصواب للتقرير $p \vee \neg (p \wedge q)$ دائمًا T لجميع قيم كل من p وq فإن التقرير هو صواب منطقى.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \vee \neg(p \wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

شكل 3-7

الفصل الرابع
العـــد
Counting

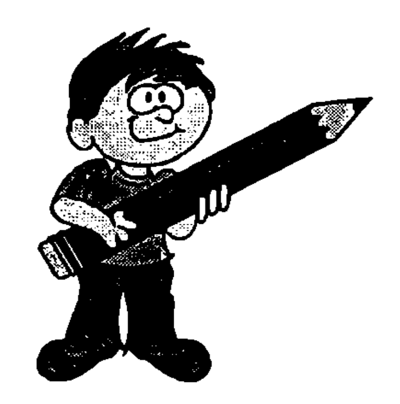
فى هذا الفصل:

- ✔ مبادئ العدّ الأساسية
- ✔ رمز المضروب
- ✔ معاملات ذات الحدين
- ✔ التباديل
- ✔ التوافيق
- ✔ مبدأ خُن الحمام
- ✔ المبدأ الشامل – المانع
- ✔ التجزئيات المرتبة وغير المرتبة

مبادئ العدّ الأساسية Basic Counting Principles

يختص التحليـل التوافيقـى combinatorial analysis، ويشمـل دراسـة التبـاديل والتوافيق والتجزيئات، بتحديد عدد الاحتمالات المنطقية لبعض الأحـداث دون الحاجة إلى تحديد كل حالة بالضرورة. يوجد مبدآن أساسـيان للعـد نستخدمهما فيما يلى:

مبدأ قاعدة المجموع Sum Rule Principle: لنفرض أن حدثًا E يمكن أن يحدث بعدد m من الطرق وأن حدثًا ثانيًا F يمكن أن يحدث بعدد n من الطرق وأن الحدثين E، F لا يمكن حدوثهما معًا في نفس الوقت. فإن E أو F يمكن حدوثه بطرق عددها $m + n$. وعمومًا إذا كان الحدث الأول E_1 يمكن أن يحدث بعدد n_1 من الطرق والحدث الثانى E_2 يمكن أن يحدث بعدد n_2 من الطرق والحدث الثالث E_3 يمكن أن يحدث بعدد n_3 من الطرق، .. وأن أى حدثين منها لا يمكن حدوثهما في نفس الوقت، فإن واحدًا منها يمكن حدوثه بطرق عددها $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots$.



مبدأ قاعدة الضرب Product Rule Principle: نفرض أن حدثًا E يمكن حدوثه بطرق عددها m وأن حدثًا آخر F يمكن حدوثه بطرق عددها n فإن عدد التوافيق combinations التى يمكن حدوثها بين E وF هو mn. وعمومًا نفرض أن E_1 يمكن حدوثها بطرق عددها n_1، يتبعه حدث ثان E_2 يحدث بطرق عددها n_2، يتبعه حدث ثالث E_3 يحدث بطرق عددها n_3 وهكذا، فإن جميع الأحداث يمكن حدوثها بالترتيب المذكور بطرق عددها $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots$.

يوجد تعليل لهذين المبدأين معتمدًا على نظرية الفئات. وبصورة أوضح نفترض أن $n(A)$ يرمز لعدد عناصر الفئة A فإن:

1. مبدأ قاعدة المجموع Sum Rule Principle: إذا كانت A، B فئتين منفصلتين فإن

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

2. مبدأ قاعدة الضرب Product Rule Principle: ليكن $A \times B$ حاصل الضرب الديكارتى للفئتين A، B فإن:

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

رمز المضروب Factorial Notation

حاصل ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة من 1 إلى n شاملاً يرمز له بـالرمز $n!$ (يقرأ "مضروب n" n factorial):

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2)(n-1)n$$

بعبارة أخرى يعرف $n!$ كالآتى

$$1! = 1 \quad \text{و} \quad n! = n \cdot (n-1)!$$

ومن المفيد تعريف $0! = 1$.

معاملات ذات الحدين Binomial Coefficients

الرمز $\binom{n}{r}$ ، حيث r و n أعداد صحيحة موجبة، $r \le n$ يعرف كالآتى

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1)r}$$

ويمكن كتابته أيضًا على الصورة

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1)r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

لكن $n-(n-r) = r$ فيكون لدينا العلاقة الهامة التالية:

$$\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$$

وبعبارة أخرى، إذا كان $a+b=n$ فإن

$$\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$$

معاملات ذات الحدين ومثلث بَسْكال

Binomial Coefficients and Pascal's Triangle

الأعداد $\binom{n}{r}$ تسمى معاملات ذات الحدين حيث تظهر كمعاملات فى مفكوك المقدار $(a+b)^n$. يمكن إثبات أن

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

....

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

....

شكل 4-1

معاملات القوى المتتالية لـ $(a+b)$ يمكن ترتيبها فى نظام مثلثى الشكل من الأعداد يسمى مثلث بَسْكال كما فى الشكل 4-1.

الأعداد فى مثلث بَسْكال لها الخواص المشتركة التالية:

(i) العدد الأول والعدد الأخير فى كل صف هو 1.

(ii) أى عدد آخر فى هذه المصفوفة يحصل عليه بجمع العددين اللذين يظهران مباشرة أعلاه فى الصف السابق. مثلاً $4+6=10$، $10+5=15$، $10+10=20$.

بما أن الأعداد التى تظهر فى مثلث بَسْكال هى معاملات ذات الحدين فإننا نحصل على الخاصية (ii) من النظرية التالية:

نظرية 4.1: $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r}$.

التباديل Permutations

أى ترتيب لفئة n من الأشياء فى ترتيب معين يسمى تبديلاً لهذه الأشياء مأخوذة جميعها معًا. أى ترتيب معين لأى $r \leq n$ من هذه الأشياء يسمى تبديلاً من نوع r أو تبديلاً لـ n من الأشياء مأخوذ منها r فى كل مرة. نعتبر مثلاً مجموعة الحروف a, b, c, d. فإن:

(i) $bdca$، $dcba$، $acdb$ هى تباديل للحروف الأربعة مأخوذة كلها معًا.

(ii) bad، adb، cbd، bca هى تباديل للأربعة حروف مأخوذ منها 3 معًا فى كل مرة.

(iii) ad، cb، da، bd هى تباديل لأربعة حروف مأخوذ منها 2 معًا فى كل مرة.

عدد التباديل لأشياء عددها n مأخوذ منها r فى كل مرة يرمز له بأحد الرموز

$$P(n,r),\ {}_nP_r,\ P_{n,r},\ P_r^n,\ \text{or } (n)_r$$

وسوف نستخدم الرمز $P(n,r)$ ونستنتج له صيغة عامة فيما يلى.

استنتاج صيغة للتباديل $P(n,r)$ Derivation of the Formula for $P(n,r)$

استنتاج الصيغة لعدد التباديل لـ n من الأشياء مأخوذ منها r فى كل مرة (التباديل من رتبة r لـ n من الأشياء) $P(n,r)$، يتم بالطريقة الآتية. العنصر

الأول فى التبديل من نوع r لعدد n من الأشياء يمكن اختيــاره بعــدد n مــن الاختيارات المختلفة. أما العنصر الثانى فى التباديل فيمكن اختيــاره بعــدد $n-1$ من الطرق ويتلو ذلك اختيار العنصر الثالث بعدد $(n-2)$ مــن الطــرق. نستمر على هذا المنوال حتى العنصر رقم r فيتم اختيــاره بطــرق عددهــا $n-(r-1)=n-r+1$. وهكذا باستخدام المبدأ الأساسى للعد، نحصل على

$$P(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

ويمكن أيضًا إثبات أن

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\cdot(n-r)!}{(n-r)!}$$
$$=\frac{n!}{(n-r)!}$$

وبذلك نكون قد أثبتنا النظرية التالية:

نظرية 4.2: $P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$.

نتيجة 4.3: يوجد عدد $n!$ من التباديل لـ n من الأشياء مأخوذة جميعها معًا فمثلاً: يوجد $3!=1\,.\,2\,.\,3=6$ من التباديل للحروف الثلاثــة a، b، c. هــذه التباديل هى: abc، acb، bac، bca، cab، cba.

التباديل مع التكرار Permutations with Repetitions

عادة ما نطلب معرفة عدد التباديل لفئة متعددة multiset؛ أى فئة من الأشياء بعضها متشابه. إذا رمزنا بـ

$$P(n;n_1,n_2,\ldots,n_r)$$

لعدد من التباديل n من الأشياء منها (n_1) متمــاثل، (n_2) متمــاثل، .....،

(n_r) متماثل (أو مكرر) فإن الصورة العامة هى:

نظرية 4.4: $P(n;n_1,n_2,\ldots,n_r)=\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$.

التوافيق Combinations

نفرض أن لدينا n من الأشياء. التوفيق combination لهذه الـ n من الأشياء مأخوذ منها r معًا هو أى اختيار لـ r من هذه الأشياء حيث الترتيب لا يهم. ويمعنى آخر التوفيق من نوع r لفئة بها n من الأشياء هو أى فئة جزئية منها تحتوى r من العناصر. فمثلاً توافيق الحروف a، b، c، d مأخوذ منها ثلاثة فى كل مرة هى

$$\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\} \quad \text{أو باختصار} \quad abc, abd, acd, bcd$$

نلاحظ أن التوافيق الآتية متساوية

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba$$

فكل منها رمز للمجموعة $\{a, b, c\}$.

يرمز لعدد التوافيق لـ n من الأشياء مأخوذ منها r معًا بالرمز $C(n, r)$ فى بعض النصوص تستخدم الرموز $C_{n,r}$، C^n_r و $_nC_r$. سوف نستخدم الصيغة العامة $C(n, r)$ فيما يلى.

قانون لـ $C(n, r)$ Formula for $C(n, r)$

بما أن أى توفيق لـ n من الأشياء مأخوذ منها r معًا يعين $r!$ من تباديل هذه الأشياء ضمن هذا التوفيق، فيمكننا استنتاج أن

$$P(n, r) = r!C(n, r)$$

ولهذا نحصل على

نظرية 4.5: $C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

تذكر أن معامل ذات الحدين $\binom{n}{r}$ عُرف ليكون $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ ولذلك فإن $C(n,r) = \binom{n}{r}$

مبدأ خُن الحمام The Pigeonhole Principle

كثيرًا من النتائج فى نظرية التوافيق يأتى من التقرير الواضح التالى.

مبدأ خن الحمام: إذا تم شغل عـــدد n مـن أخنـان الحمـام pigeonholes، بعدد $(n + 1)$ أو أكـــثر مـن الحمـام pigeons فإنـه يوجـد علـى الأقـل خـن pigeonhole واحد مشغول بأكثر من حمامة pigeon.

يطبق هذا المبدأ على كثير من المسائل حيث نريد أن نوضح أن وضعًا معينًا ممكن الحدوث. فمثلاً: نفرض أن أحد الأقسام به عدد 13 أســتاذًا، عندئـذ يكون اثنان من الأساتذة pigeons من مواليد نفس الشهر pigeonholes.

مبدأ خن الحمام يعمم كالآتى:

تعميم مبدأ خن الحمام Generalized Pigeonhole Principle

إذا شُغل n من أخنـان الحمـام pigeonholes n بعـدد $kn + 1$ أو أكـثر مـن الحمام pigeons حيث k عدد صحيح موجــب فـإن خـن واحـد علـى الأقـل مشغول بعدد $k + 1$ أو أكثر من الحمامات pigeons.

المبدأ الشامل-المانع The Inclusion-Exclusion Principle

إذا كانت A وB فئتين منتهيتين، فإن

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

وبعبارة أخرى، لإيجاد العدد $n(A \cup B)$ لعناصر الاتحاد $(A \cup B)$ فإننا نجمع

العددين $n(A)$ و$n(B)$ ثم نطرح من حاصل الجمع العـــدد $n(A \cap B)$، بمعنـى أننا نشمل الأعـــداد $n(A)$ و$n(B)$ ونســتبعد العـدد $n(A \cap B)$. هـذا المبـدأ صحيح لأى عدد من الفئات. نعرض القانون فى حالة 3 فئات.

نظرية 4.6: لأى فئات منتهية A، B، C فإن

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$$
$$-n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

التجزيئات المرتبة وغير المرتبة

Ordered and Unordered Partitions

لتكن A حقيبة تحتوى عدد 7 كرات، مرقمة من 1 إلى 7. نحسب عدد الطرق التى يمكن بها سحب أولاً كرتين من داخل الحقيبة ثم 3 كرات مـن الحقيبـة وأخيرًا كرتين من الحقيبة. أى أننا نريد معرفة عدد التجزيئات المرتبة

$$[A_1, A_2, A_3]$$

للفئة المكونة من عدد 7 كرات إلى خلية A_1 تحتوى على كرتيـن، وخليـة A_2 تحتوى على 3 كرات ثم خلية A_3 تحتوى على كرتين. ويسمى هذا بالتجزىء المرتب لأننا نميز بين

$$[\{1,2\}, \{3,4,5\}, \{6,7\}] \quad \text{و} \quad [\{6,7\}, \{3,4,5\}, \{1,2\}]$$

وكل منها يحدد نفس التجزئ للفئة A.

والآن نبدأ بعدد 7 كرات فـى الحقيبة. يـوجد عدد $\binom{7}{2}$ طريقة لسحب الكـرتين الأوليين، أى لتعييـن الخلية الأولى A_1؛ ويلى ذلك وجـود عـدد

5 كرات باقية فى الحقيبة ولهذا يوجد عدد $\binom{5}{3}$ طريقة لسحب 3 كرات منها، أى لتعيين الخلية الثانية A_2. وفى النهاية توجد كرتان باقيتان فى الحقيبة وبذلك يكون عدد الطرق $\binom{2}{2}$ لتعيين الخلية الثالثة A_3. إذاً يوجد عدد

$$\binom{7}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{2}=\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}=210$$

تجزيء مرتب مختلف للفئة A إلى خلايا A_1 تحتوى على كرتين، A_2 تحتوى على 3 كرات، A_3 تحتوى على كرتين.

نلاحظ أن

$$\binom{7}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{2}=\frac{7!}{2!5!}\cdot\frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{2!}{2!0!}=\frac{7!}{2!3!2!}$$

لأن كل بسط بعد الكسر الأول يُحذف مع الحد الثانى فى مقام الكسر السابق له. ويمكن إثبات صحة ذلك فى الحالة العامة، فنحصل على

نظرية 4.7: إذا احتوت الفئة A على n من العناصر وكانت $n_1, n_2, \ldots, n_r$ أعداداً صحيحة موجبة مجموعها n، أى أن

$$n=n_1+n_2+\ldots+n_r$$

فإنه يوجد عدد

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_r!}$$

من التجزيئات المرتبة المختلفة للفئة A على الصورة $[A_1, A_2, \ldots, A_r]$ حيث A_1 تحتوى على n_1 من العناصر، A_2 تحتوى على n_2 من العناصر، ... A_r تحتوى على n_r من العناصر.

مسألة محلولة 4.1 نفترض أن لوحة أرقام السيارة تحتوى على حرفين ثم ثلاثة أرقام، والرقم الأول لا يساوى الصفر. كم عدد اللوحات التى يمكن تصنيعها؟

Solved Problem 4.1 Suppose a license plate contains two letters followed by three digits with the first digit not zero. How many different license plates can be printed?

الحل: كل حرف يمكن طباعته بعدد 26 طريقة مختلفة، والرقم الأول له 9 طرق وكل واحد من الرقمين التاليين له 10 طرق مختلفة؛ أى أن عدد لوحات الرخص المختلفة التى يمكن تصنيعها هو:

$$26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 608{,}400$$

مسألة محلولة 4.2 كم عدد التباديل لسبعة أحرف من الممكن تكوينها مستخدمًا حروف كلمة "BENZENE"؟

Solved Problem 4.2 How many seven-letter permutations can be formed using the letters of the word "BENZENE"?

الحل: نبحث عن عدد التباديل لسبعة أشياء منها 3 متماثلة (حرف E) وأيضًا 2 متماثلان (حرف N). نظرية 4.4 تعطى عدد الكلمات وهو

$$P(7;3;2) = \frac{7!}{3!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 420$$

مسألة محلولة 4.3 أوجد عدد الطرق m التى يُجزأ بها عدد 12 طالبًا فى ثلاث فرق رياضية A_1، A_2، A_3 بحيث يحتوى كل فريق على أربعة طلاب.

Solved Problem 4.3 Find the number of m ways that 12 students can be partitioned into three teams, A_1, A_2, and A_3, so that each team contains four students.

الحل: ليكن A أحد الطلاب، فيوجد طرق عدد $\binom{11}{3}$ طريقة لاختيار 3 طلاب

يكونون مع A فى نفس الفريق. ليكن B هو أحد الطلاب مــن غـير فريـق A، فيوجد طرق عددها $\binom{7}{3}$ لاختيار 3 طلاب ليكونوا مع B فى نفس الفريق. الطلاب الباقون يكونون الفريق الثالث. أى أن عدد الطرق التى يُجــزأ بـها الطلاب فى الفرق الثلاث هو

$$m = \binom{11}{3} \cdot \binom{7}{3} = 165 \cdot 35 = 5775$$

الفصل الخامس
العـلاقات
Relations

فى هذا الفصل:

- ✔ فئات حاصل الضرب
- ✔ العلاقات
- ✔ التمثيلات التصويرية للعلاقات
- ✔ تركيب العلاقات
- ✔ أنواع أخرى من العلاقات
- ✔ خواص الإغلاق
- ✔ علاقات التكافؤ
- ✔ علاقات الترتيب الجزئى

فئات حاصل الضرب Product Sets

نعتـبر أى فئتيـن A و B. فئـة الأزواج المرتبـة ordered pairs (a,b) حيـث $a \in A$ و $b \in B$ تسمى حـاصل ضـرب A و B أو حـاصل الضـرب الديكـارتى لـ A و B ويرمز لها بالرمز $A \times B$ ويقرأ "A ضرب B". ومن التعريف

$$A \times B = \{(a,b): a \in A \text{ and } b \in B\}$$

مثال 5.1 لتكن $A = \{1, 2\}$ و $B = \{a, b, c\}$ فإن

Example 5.1 Let $A = \{1, 2\}$ and $B = \{a, b, c\}$. Then

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$
$$B \times A = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$
$$A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

توجد ملاحظتان هامتان فى المثال السابق. الأولى أن $A \times B \neq B \times A$. فحاصل الضرب الديكارتى يختص بالأزواج المرتبة وبالتالى من الطبيعى أن يكون الترتيب الذى نعتبر فيه الفئات مهمًا. ثانيًا باستخدام $n(S)$ لعدد عناصر الفئة S فإن

$$n(A \times B) = 6 = 2 \cdot 3 = n(A) \cdot n(B)$$

وفى الحقيقة $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$ لأى فئتين منتهيتين A وB. وينتج هذا من ملاحظة أنه لأى زوج مرتب (a, b) فى $A \times B$، توجد $n(A)$ من الاحتمالات للعنصر a، ولكل من هذه الاحتمالات يوجد عدد $n(B)$ من الإمكانيات للعنصر b.

مفهوم حاصل ضرب الفئات يمكن تعميمه ليشمل أى عدد محدود من الفئات. لأى فئات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ فإن الفئات المكوَّنة من النونيات المرتبة n–tuples $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ حيث $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$ تسمى حاصل ضرب الفئات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ويرمز لها بالرمز

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \quad \text{or} \quad \prod_{i=1}^{n} A_i$$

العلاقات — Relations

نبدأ بتعريف.

تعريف. إذا كانت A و B فئتين، فإن العلاقة الثنائية، أو ببساطة العلاقة من A إلى B هى *أى* فئة جزئية من $A \times B$.



نفرض أن R علاقة من A إلــى B. إذًا R هـى فئـة مـن الأزواج المرتبة حيث كل عنصر أول يأتى من الفئة A وكل عنصر ثانٍ يأتى من B، أى أنـه لكـل زوج $a \in A$ و $b \in B$ يكون واحد فقط من التقريرين التاليين صوابًا:

(i) $(a, b) \in R$ ونقول إن a لها العلاقة R مع b ونكتب aRb.

(ii) $(a, b) \notin R$ ونقول إن a ليس لها العلاقة R مع b ونكتب $a\not{R}b$.

إذا كانت R علاقة من الفئة A إلى نفسها؛ أى إذا كـانت R فئـة جزئيـة مـن $A^2 = A \times A$، نقول إن R علاقة على A.

ونطاق تعريف العلاقة R هو فئة كل العناصر الأولى فـى الأزواج المرتبـة التى تنتمى إلى R، والمدى للعلاقة R هو فئة كل العناصر الثانية.

العلاقة العكسية **Inverse Relation**

لتكن R أى علاقة من الفئة A إلى الفئة B. معكوس R، ويرمز له بالرمز R^{-1}، هو علاقة من B إلى A تتكون من تلك الأزواج المرتبة التـى عندمـا يعكـس ترتيبها تنتمى إلى R؛ أى أن

$$R^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in R\}$$

فمثـلاً معكوس العـلاقـة $R = \{(1, y), (1, z), (3, y)\}$ مـن $A = \{1, 2, 3\}$ إلـى $B = \{x, z, y\}$ يعطى بالعلاقة

$$R^{-1} = \{(y,1), (z,1), (y,3)\}$$

ومن الواضح إنه إذا كانت R أى علاقة فإن $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$. أيضًا نطاق التعريف والمدى لـ R^{-1} هى نفسها مدى ونطاق تعريف R على الترتيب. بالإضافة إلى ذلك، إذا كانت R علاقة على A فإن R^{-1} تكون أيضًا علاقة على A.

الدوال كعلاقات Functions as Relations

هناك وجهة نظر أخرى لدراسة الدوال. قبل كل شيء، كل دالـة $f: A \to B$ تنشئ علاقة من A إلى B تسمى مخطط الدالة graph of f وتعرف بـ

$$\text{Graph of } f = \{(a, b): a \in A, b = f(a)\}$$

الدالتان $f: A \to B$ و $g: A \to B$ تتساويان، ونكتب $f = g$ إذا كان $f(a) = g(a)$ لكل عنصر $a \in A$؛ أي أن لـهما نفس المخطـط. الآن، فـى هـذا المخطـط للعلاقة نجد أن كل عنصر a فى A ينتمى إلى زوج مرتب وحيـد (a, b) فـى العلاقة. ومن ناحية أخرى، أى علاقة f من A إلى B لها هذه الخاصية تنشئ دالة $f: A \to B$ حيث $f(a) = b$ لكل زوج مرتـب (a, b) فـى f. وبالتـالى فـإن التعريف المكافئ للدالة هو:

تعريف: الدالة $f: A \to B$ هـى علاقـة مـن A إلـى B (أى فئـة جزئيـة مـن $A \times B$) حيث كل عنصر $a \in A$ ينتمى إلى زوج مرتب وحيد (a, b) فى f.

التمثيلات التصويرية للعلاقات

Pictorial Representations of Relations

نعتبر أولاً العلاقة S على الفئة $\mathbb{R}$ للأعداد الحقيقة؛ أى أن S فئة جزئيـة مـن $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. بما أن $\mathbb{R}^2$ يمكن تمثيلها بفئة نقاط فى المسـتوى، فإنـه يمكـن تصوير S بتوضيح تلك النقاط فى المستوى التى تنتمى إلى S. هـذا التمثيـل التصويرى للعلاقة يسمى أحيانًا مخطط العلاقة.

من الشـائع أن العلاقـة S تتكـون مـن جميـع الأزواج المرتبـة مـن الأعـداد الحقيقية التى تحقق معادلة معطاة

$$E(x, y) = 0$$

وفى هذه الحالة يكون مخطط العلاقة هو نفسه الرسم البيانى للمعادلة.

تمثيل العلاقات على الفئات المنتهية

Representations of Relations on Finite Sets

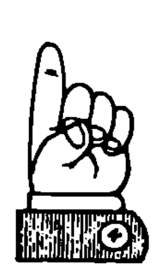
لنفرض أن A و B فئتان منتهيتان. نعرض فيما يلى طريقتين لتصوير العلاقة R من A إلى B.

(i) كوّن رصة مستطيلة صفوفها معنونة labeled بعناصر الفئة A وأعمدتها معنونة بعناصر الفئة B، ثم ضع 1 أو 0 فى كل موضع فى الرصة وفقًا لكون $a \in A$ على علاقة أم لا بالعنصر $b \in B$ أم لا يقال لهذه الرصة مصفوفة العلاقة matrix of the relation.

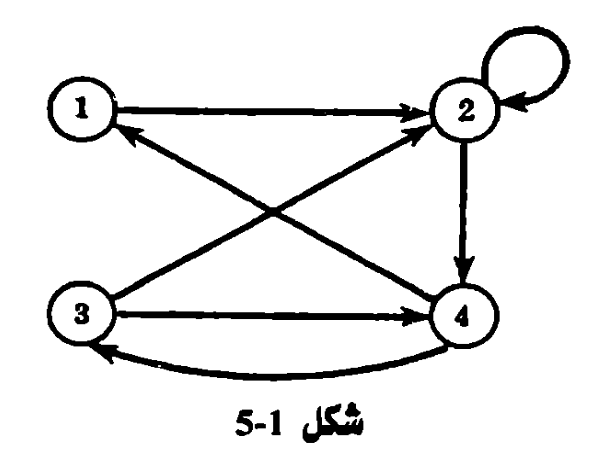
(ii) ضع عناصر A وعناصر B فى منطقتين منفصلين، ثم ارسم سهمًا من $a \in A$ إلى $b \in B$ إذا كان a على علاقة مع b. يقال لهذه الصورة مخطط الأسهم arrow diagram للعلاقة.

المخططات الموجّهة للعلاقات على الفئات

Directed Graphs of Relations on Sets



توجد طريقة أخرى لتصوير العلاقة R عندما تكون R علاقة من فئة منتهية لنفسها. نكتب أولاً عناصر الفئة ونرسم سهمًا من كل عنصر x إلى كل عنصر y عندما تكون x على علاقة بـ y. يسمى هذا المخطط بالمخطط الموجّه للعلاقة. شكل 5-1 مثلاً يوضح المخطط الموجّه للعلاقة الآتية R على الفئة $A = \{1, 2, 3, 4\}$:



شكل 5-1

$$R = \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$$

لاحظ وجود سهم من العنصر 2 إلى نفسه لأن 2 على علاقة R مع نفسه.

تركيب العلاقات Composition of Relations

لتكن A، B، C فئات ولتكن R علاقة من A إلى B و S علاقة من B إلى C. أى أن R فئة جزئية من $A \times B$، S فئة جزئية من $B \times C$. إذاً R و S تنشئان علاقة من A إلى C يرمز لها بـ $R \circ S$ وتعرف كالتالى $a(R \circ S)c$ إذا كان aRb، bSc لبعض العناصر $b \in B$.

$$a(R \circ S)c \text{ if for some } b \in B, \text{ we have } aRb \text{ and } bSc$$

$$R \circ S = \{(a,c)\text{: there exists } b \in B \text{ for which } (a,b) \in R \text{ and } (b,c) \in S\}$$

العلاقة $R \circ S$ تسمى تركيبًا composition من R و S وأحيانًا يرمز لها بـ RS.

لنفرض أن R علاقة على الفئة A؛ أى أن R علاقة من الفئة A إلى نفسها. إذاً $R \circ R$ (تركيب R مع نفسها) معرف دائمًا، ويرمز لها بالرمز R^2. وبالمثل $R^3 = R^2 \circ R = R \circ R \circ R$ وهكذا. ولهذا فإن R^n معرفة لجميع الأعداد الموجبة n.

أنواع أخرى من العلاقات Other Types of Relations

لتكن A فئة. نناقش فى هذا البند عدداً من أنواع العلاقات الهامة المعرفة على A.

العلاقات الانعكاسية Reflexive Relations

العلاقة R على الفئة A علاقة انعكاسية إذا كان aRa لكل $a \in A$، أى إذا كان $(a, a) \in R$ لكل $a \in A$. ولهذا R غير انعكاسية إذا وجد $a \in A$ حيث $(a, a) \notin R$.

العلاقات المتماثلة والمتخالفة

Symmetric and Antisymmetric Relations

العلاقة R على الفئة A تسمى علاقة متماثلة، إذا كان aRb يستلزم bRa، أى أنه عندما $R \ni (a, b) \in R$ فإن $(b, a) \in R$، ولهذا فإن R تكون غير متماثلة إذا وجد $a, b \in A$ حيث $(a, b) \in R$ لكن $(b, a) \notin R$.

العلاقة R على الفئة A تسمى علاقة متخالفة antisymmetric إذا كان aRb و bRa يستلزم $a = b$ أى أنه إذا كان $(a, b) \in R$ و $(b, a) \in R$ فإن $a = b$. إذاً R تكون غير متخالفة إذا وجد $a, b \in A$ بحيث (a, b) و (b, a) ينتميان إلى R لكن $a \neq b$.

العلاقات المتعدية **Transitive Relations**

العلاقة R على الفئة A تسمى علاقة متعدية transitive إذا كان aRb و bRc يستلزم aRc، أى أنه عندما يكون $(a, b) \in R$ و $(b, c) \in R$ فإن $(a, c) \in R$. ولهذا تكون R غير متعدية إذا وجدت العناصر a، b، c فى الفئة A حيث $(a, b) \in R$ و $(b, c) \in R$ لكن $(a, c) \notin R$.

خاصية التعدى يمكن التعبير عنها بواسطة تركيب العلاقات. للعلاقة R على A، نعرف

$$R^2 = R \circ R \quad \text{وبشكل عام} \quad R^n = R^{n-1} \circ R .$$

وبذلك نحصل على النتيجة التالية.

نظرية 5.1: العلاقة R تكون متعدية إذا، وفقط إذا، كان $R^n \subseteq R$ لكل $n \geq 1$.

خواص الإغلاق **Closure Properties**

نعتبر فئة معطاة A ومجموعة كل العلاقات على A. لنفرض أن P خاصية ما لهذه العلاقات، مثل كونها متماثلة أو متعدية. العلاقة مع الخاصية P سوف تسمى علاقة من نوع P-relation P . الإغلاق من نوع P P-closure لأى علاقة

R على A ويكتب $\mathrm{P}(R)$ هو علاقة من نوع P بحيث:

$$R \subseteq \mathrm{P}(R) \subseteq S$$

لكل علاقة S من نوع P تحتوى R. وسوف نكتب (R) انعكاسية و (R) متماثلة و (R) متعدية للتعبير عن إغلاقات R الانعكاسية والمتماثلة والمتعدية.

الاغلاقات الانعكاسية والمتماثلة Reflexive and Symmetric Closures

النظرية التالية توضح بساطة الحصول على الإغلاق الانعكاسى والمتماثل لأى علاقة. هنا $\Delta_A = \{(a, a): a \in A\}$ هى العلاقة القطرية أو علاقة التساوى على A.

نظرية 5.2: لتكن R علاقة على الفئة A: عندئذ

(i) $R \cup \Delta_A$ is the reflexive closure of R.

(i) الإغلاق الانعكاسى لـ R هو $R \cup \Delta_A$.

(ii) $R \cup R^{-1}$ is the symmetric closure of R.

(ii) الإغلاق المتماثل لـ R هو $R \cup R^{-1}$.

وبعبارة أخرى للحصول على (R) انعكاسية نضيف إلى R تلك العناصر (a, a) التى على القطر والتى لا تنتمى أصلاً إلى R. وللحصول على (R) متماثلة نضيف إلى R كل الأزواج المرتبة (b, a) إذا كان (a, b) ينتمى إلى R.

الإغلاق المتعدى Transitive Closure

لتكن R علاقة على الفئة A. نذكر أن $R^2 = R \circ R$ و $R^n = R^{n-1} \circ R$. نعرف

$$R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

النظرية التالية صحيحة.

نظرية 5.3: R^* هو الإغلاق المتعدى للعلاقة R.

نفرض أن الفئة A منتهية وعدد عناصرها n. عندئذ،

$$R^* = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

ومن ثم نحصل على النتيجة التالية.

نظرية 5.4: لتكن R علاقة على الفئة A التى تحتوى على n من العناصر. عندئذ، الإغلاق المتعدى للعلاقة R يُعطى بالمعادلة

$$\text{transitive}(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

علاقات التكافؤ Equivalence Relations

لتكن S فئة غير خالية. العلاقة R على S تكون علاقة تكافؤ إذا كانت R انعكاسية ومتماثلة متعدية، أى أن R هى علاقة تكافؤ على S إذا كانت لها الخواص الثلاث التالية:

1. لكل $a \in S$، aRa.
2. إذا كانت aRb فإن bRa.
3. إذا كانت aRb و bRc فإن aRc.

والفكرة العامة وراء علاقة التكافؤ هى أنها تصنف الأشياء المتشابهة بشكل ما. فى الواقع، العلاقة "=" للتساوى على أى فئة S هى علاقة تكافؤ؛ أى أن

1. $a = a$ لكل $a \in S$.
2. إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.
3. إذا كان $a = b$ و $b = c$ فإن $a = c$.

علاقات التكافؤ والتجزيئات

Equivalence Relations and Partitions

فى هذا البند نستكشف العلاقة بين علاقات التكافؤ والتجزيئات على فئة غير خالية S. نتذكر أولاً أن التجزىء P للفئة S هو مجموعة $\{A_i\}$ من الفئات الجزئية غير الخالية من S ولها الخاصيتان التاليتان.

1. كل عنصر $a \in S$ ينتمى إلى بعض الفئات الجزئية A_i.
2. إذا كانت $A_i \neq A_j$ فإن $A_i \cap A_j = \varnothing$.

ويعبارة أخرى، فالتجزىء P للفئة S هو تقسيم لهذه الفئة إلى فئات منفصلة غير خالية.

لتكن R علاقة تكافؤ على الفئة S. لكل عنصر $a \in S$ نفرض أن $[a]$ هى الفئة المكونة من عناصر S التى ترتبط مع a بالعلاقة R، أى

$$[a] = \{x:(a,x) \in R\}$$

تسمى $[a]$ فصل التكافؤ للعنصر a فى S. أى عنصر $b \in [a]$ يسمى ممثلاً representative لفصل التكافؤ.

مجموعة كل فصول التكافؤ لعناصر S تحت علاقة التكافؤ R يرمز لها بـ S/R، أى أن

$$S/R = \{[a]:a \in S\}$$

ويسمى فئة خارج قسمة quotient set S بواسطة R.

الخاصية الأساسية لفئة خارج القسمة محتواه فى النظرية التالية.

نظرية 5.5: لتكن R علاقة تكافؤ على الفئة S. عندئذ فئة خارج القسمة S/R هى تجزئ للفئة S على وجه الخصوص

(i) لكل $a \in S$ فإن $a \in [a]$.

(ii) $[a] = [b]$ إذا، وفقط إذا، كانت $(a, b) \in R$.

(iii) إذا كانت $[a] \neq [b]$، فإن $[a]$، $[b]$ منفصلان.

وبالعكس، إذا كانت $\{A_i\}$ هى تجزئ للفئة S فإنه توجد علاقة تكافؤ R على S حيث تكون الفئات A_i هى فصول التكافؤ.

علاقات الترتيب الجزئى Partial Ordering Relations

هذا البند يعرف فصلاً هامًا آخر من العلاقات. العلاقة R على الفئة تسمى ترتيبًا جزئيًا partial ordering إذا كانت R انعكاسية ومتخالفة ومتعدية. الفئة

S مع علاقة الترتيب الجزئى R تسمى الفئة المرتبة جزئيًا partially ordered set or poset. فمثلاً $\le$ هى علاقة ترتيب جزئى للأعداد الحقيقية، وأيضًا علاقة الاحتواء $\subset$ هى ترتيب جزئى لفئة القوة للفئة .

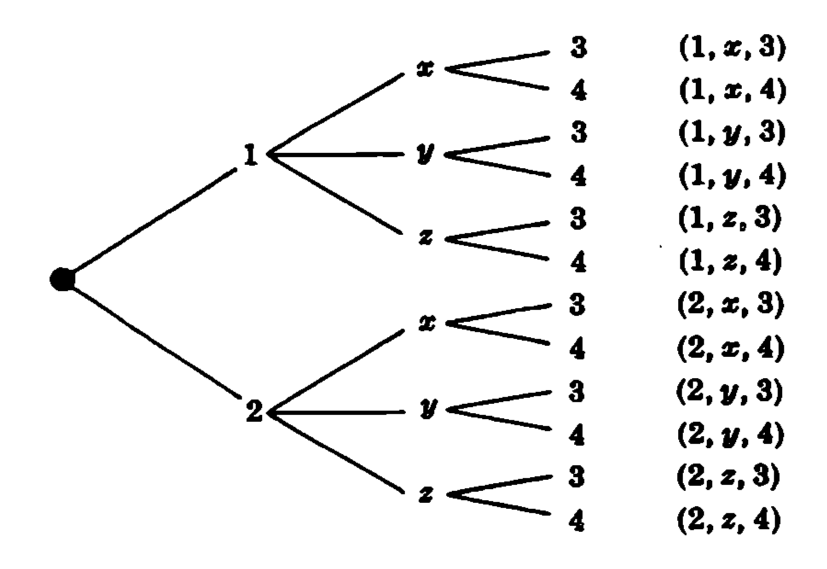
مسألة محلولة 5.1 إذا أعطيت $A = \{1, 2\}$، $B = \{x, y, z\}$، $C = \{3, 4\}$ أوجد $A \times B \times C$.

Solved Problem 5.1 Given $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y, z\}$, and $C = \{3, 4\}$. Find: $A \times B \times C$.

الحل. $A \times B \times C$ يتكون من الثلاثيات المرتبة (a, b, c) حيث $a \in A$، $b \in B$، $c \in C$. $A \times B \times C$ يمكن الحصول عليه بشكل منظم من خلال ما يعرف باسم المخطط الشجرى tree diagram (شكل 5-2). عناصر $A \times B \times C$ هى بالضبط الاثنى عشر (12) ثلاثيًا المرتب على يمين المخطط الشجرى.

نلاحظ أن $n(A) = 2$، $n(B) = 3$، $n(C) = 2$، وكما هو متوقع

$$n(A \times B \times C) = 12 = n(A) \cdot n(B) \cdot n(C)$$



شكل 5-2

مسألة محلولة 5.2. أوجد عدد العلاقات من $A = \{a, b, c\}$ إلى $B = \{1, 2\}$.

Solved Problem 5.2 Find the number of relations from $A = \{a, b, c\}$ to $B = \{1, 2\}$.

الحل: يوجد $3(2) = 6$ عناصر فى $A \times B$ وبالتالى يوجد $m = 2^6 = 64$ فئـة جزئية من $A \times B$ ولذلك فإن عدد العلاقات من A إلى B هو $m = 64$ علاقة.

الفصل السادس
نظرية المخططات
Graph Theory

فى هذا الفصل:

- ✔ مقدمة؛ هياكل البيانات
- ✔ المخططات ومتعددو المخططات
- ✔ المخططات الجزئية، المخططات أحادية التشاكل ومخططات التوءمة
- ✔ المسارات؛ الترابط
- ✔ المخططات المعلّمة والموزونة
- ✔ المخططات التامة والنظامية وثنائية التجزىء
- ✔ المخططات الشجرية

مقدمة؛ هياكل البيانات Introduction; Data Structures

تظهر الأسماء الآتية فى كثير من فروع الرياضيات وعلوم الحاسب: بدلاً من، المخططات، المخططات الموجهة، الأشجار، الأشجار الثنائية. وعلى أية حال، حتى نتمكن من فهم كيفية تخزين هذه الأشياء فى الذاكرة وفهم الخوارزميات عليها فإننا نحتاج لمعرفة القليل عن بعض هياكل البيانات. نناقش الآن

القوائـــم الموصولـــة linked lists والمؤشـــرات pointers والرصّـــــات stacks والطوابير queues.

القوائم الموصولة والمؤشرات Linked Lists and Pointers

القوائم الموصولـة والمؤشـرات سـتقدم مـن خـلال مثـال. نفـرض أن شركـة للسمسرة تحتفظ بملف فيه كل سجل record يحتوى على اسم العميل واسـم البائع. مثلاً، الملف يحتوى على البيانات التالية:

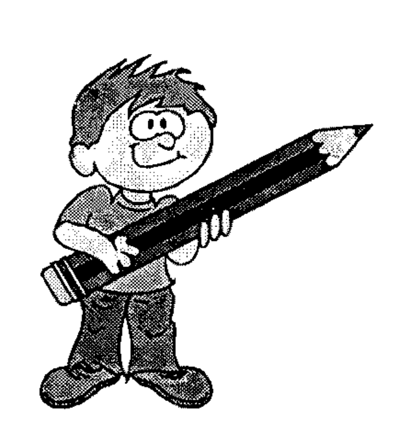
العميل	Adams	Brown	Clark	Drew	Evans	Farmer	Geller	Hill	Infeld
البائع	Smith	Ray	Ray	Jones	Smith	Jones	Ray	Smith	Ray

هناك عمليتان أساسيتان يمكن إجراؤهما على هذه البيانات:

العملية A: إذا أعطيت اسم العميل، أوجد اسم البائع المقابل.

العملية B: إذا أعطيت اسم البائع، أوجد قائمة عملائه.

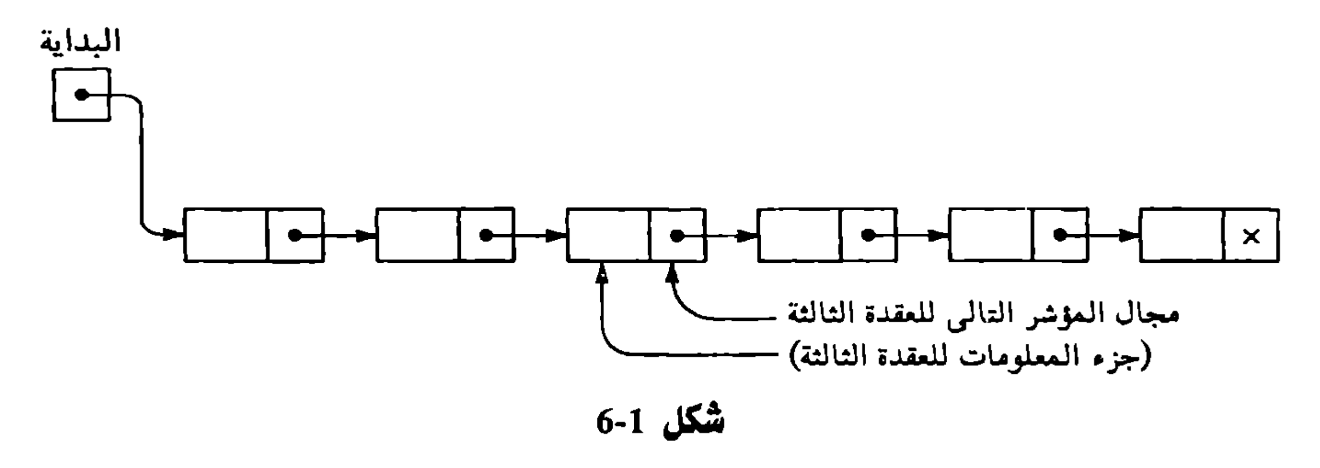
نناقش عدداً من الطرق التى يمكـن بـها تخزيـن هـذه البيانـات فـى الحاسـب، وكذلك سهولة إجراء العمليتين A و B على البيانات.



من الواضـح أنـه يمكـن تخزيـن هـذا الملـف فـى الحاسـب بواسـطة منظومــة مكونــة مــن صفيــن (أو عمودين) تحتــوى كـل منـهما علـى 9 أسـماء. ولأن العملاء دونوا أبجديًا، فمن السهل إجراء العمليــة A. وعلى العكس من ذلك، لإجراء العملية B يلزم البحث خلال كل المنظومة. من الممكن تخزيــن البيانـات فى الذاكرة بسهولة إذا استخدمنا منظومة ثنائية البعد حيث الصفوف تناظر القائمة المرتبة أبجديًا للبــائعين وحيـث يوضـع 1 فـى المصفوفة التى تشير إلى بائع له عميل وتوضع أصفار فى غير ذلـك. العيـب الرئيسى لهذا التمثيل هو ضياع جـزء كبـير مـن الذاكـرة لوجـود كثـير مـن الأصفار فى المصفوفة. فمثلاً، إذا كان لدى الشركة 1000 عميل و20 بائعًا،

فسيحتاج الأمر إلى 20,000 موضع بالذاكرة لتخزين هذه القائمة، منها فقط 1000 موضع ذى فائدة.

نناقش الآن طريقة لتخزين البيانات فى ذاكرة تستخدم قوائم موصولة ومؤشرات. نقصد بالقائمة الموصولة تجمعًا خطيًا من عناصر البيانات تسمى عُقَدًا nodes حيث الترتيب الخطى يعطى بواسطة مجال المؤشرات. شكل 6-1 يبين مخططًا لقائمة موصولة بها ست عقد.



شكل 6-1

أى أن كل عقدة تقسم إلى جزئين: الجزء الأول يحتوى على معلومات عن العنصر (مثلاً أسماء، عناوين، ...) والجزء الثانى يسمى المجال الموصول أو مجال المؤشر التالى، يحتوى على عنوان العُقدَة التالية فى القائمة. هذا المجال للمؤشر يوضح بسهم مخطط من عقدة ما إلى العقدة التالية لها فى القائمة. يوجد أيضًا مؤشر متغير يسمى البداية START فى شكل 6-1 وهو يعطى عنوان العقدة الأولى فى القائمة. بالإضافة إلى ذلك يحتوى مجال المؤشر للعقدة الأخيرة على عنوان محظور يسمى المؤشر الصفرى null pointer وهو يمثل نهاية القائمة.

إحدى الطرق الرئيسية لتخزين البيانات الأصلية موضحة فى شكل 6-2 وتستخدم القوائم الموصولة. لاحظ وجود مصفوفات منفصلة (مرتبة أبجديًا) للعملاء وللبائعين.

توجد أيضًا مصفوفة مؤشرات للبائعين توازى مصفوفة العملاء، وهى تحدد موقع البائع بالنسبة إلى العميل. إذًا يمكن إجراء العملية A بسهولة وسرعة.

	Customer	SLSM	NEXT
1	Adams	3	5
2	Brown	2	3
3	Clark	2	7
4	Drew	1	6
5	Evans	3	8
6	Farmer	1	0
7	Geller	2	9
8	Hill	3	0
9	Infeld	2	0

Salesman	START	
Jones	4	1
Ray	2	2
Smith	1	4

شكل 6-2

بالإضافة إلى ذلك فإن قائمة العملاء لكل بائع هى قائمة موصولة كما ناقشنا سابقًا. وتحديدًا توجد مصفوفة مؤشر (بداية) START توازى مصفوفة البائع وتشير إلى أول عملاء البائع. وتوجد مصفوفة مؤشر التالى NEXT تشير إلى موقع العميل التالى فى قائمة البائع (أو تحتوى على 0 لتشير إلى نهاية القائمة). هذه العملية يشار إليها بالأسهم فى شكل 6-2 للبائع Ray.

يمكن الآن إجراء العملية B بسهولة وسرعة؛ بمعنى أنه لا داعى للبحث خلال قائمة كل العملاء للحصول على قائمة العملاء لبائع معين. فيما يلى خوارزمية (وهى مكتوبة شبه مشفرة).

Algorithm 6.1 The name of a salesman is read and the list of his customers is printed.

Step 1. Read XXX.

Step 2. Find K such that SALESMAN[K] = XXX. [Use binary search.]

Step 3. Set PTR := START[K]. Initializes pointer PTR.]

Step 4. Repeat while PTR ≠ NULL.
(*a*) Print CUSTOMER[PTR].
(*b*) Set PTR := NEXT[PTR]. [Update PTR.]
{End of loop.}

Step 5. Exit.

خوارزمية 6.1 يقرأ اسم البائع وقائمة عملائه تُطبع

***الخطوة* 1.** اقرأ XXX .

***الخطوة* 2.** أوجد K بحيث البائع (K) = XXX. [استخدم البحث الثنائى].

***الخطوة* 3.** ضع PTR:=START[K]. [يبدأ المؤشر PTR].

***الخطوة* 4.** كرر الخطوات طالما PTR ≠ Null.

(*a*) اطبع العميل [PTR].

(*b*) ضع PTR = Next [PTR]. [تحديث PTR] (نهاية الدورة).

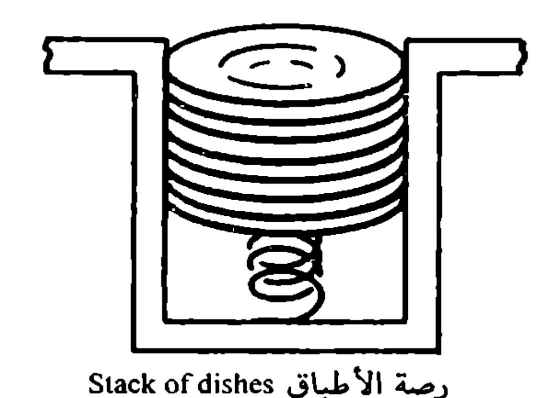
***الخطوة* 5.** خروج

الرصَّات، الطوابير، طوابير الأولوية

Stacks, Queues, and Priority Queues

هناك هياكل للبيانات غير المصفوفات والقوائم الموصولة سوف تظهر فى مخططات الخوارزميات. هذه الهياكل هى الرصات stacks، الطوابير queues، طوابير الأولوية priority queues ونصفها باختصار كالآتى:

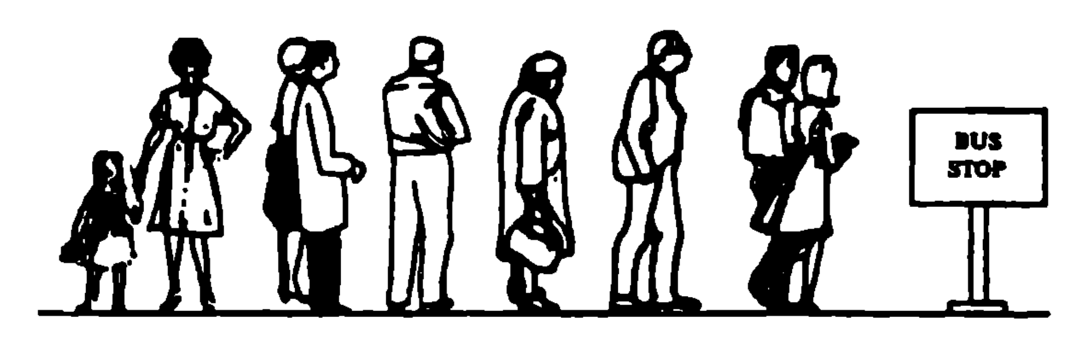
(*a*) الرصَّة **Stack**: الرصة وتسمى أيضًا نظام "أخر من يدخل أول من يخرج" last-in-first-out (LIFO) هى قائمة خطية تسمح فقط بالإضافة والحذف عند نهاية واحدة تسمى "القمة" "top". هذا الهيكل يشبه فى عمله رصة أطباق فى نظام يحوى زنبرك كما فى شكل 6-3 ويلاحظ أن الأطباق الجديدة تضاف فقط عند قمة الرصة وأيضًا تأخذ الأطباق فقط من عند قمة الرصة.



Stack of dishes رصة الأطباق

شكل 6-3

(*b*) الطابور Queue: الطابور يقال له أيضًا نظام "أول مـن يدخـل أول مـن يخرج" first-in-first-out (FIFO) وهو قائمة خطية يمكـن الحـذف منـها مـن عند نهاية واحدة للقائمة تسـمى "مقدمـة" "front" القائمـة. ويتـم الإضافـة فقط عند النهاية الأخرى للقائمة وتسمى "مؤخرة" "rear" القائمة. هذا الـهيكل يعمل بنفس طريقة خط انتظار الناس للأتوبيس فى المحطة كما فى شكل 4-6. أى أن أول شخص فى الطابور هو أول شخص يصعـد للأتوبيـس والشخـص الجديد يذهب إلى نهاية الطابور.



شكل 4-6 طابور انتظار الأتوبيس

(*c*) طابور الأولوية Priority Queue: لتكن S فئة من العنـاصر حيـث يمكـن إضافة عناصر جديدة دوريًا لكن أكبر عنصر موجود حاليًا (العنصر ذو أعلـى أولوية) دائمًا يتم حذفه. تسمى S طابور الأولوية. قوانين "النساء والأطفـال أولاً"، "السن قبل الجَمال" هى أمثلة لطوابير الأولوية. الرصـات والطوابـير العادية هى أنواع من طوابير الأولويـة. بـالأخص، العنصـر ذو أعلـى أولويـة highest priority فى الرصة هو أخر عنصر أضيف ولكن العنصر الذى له أعلى أولوية فى الطابور هو أول عنصر أضيف.

المخططات ومتعددو المخططات Graphs and Multigraphs

المخطط graph G يتكون من شيئين:

(i) فئة $V = V(G)$ عناصرها تسمى رؤوس أو نقط أو عُقد المخطط G.

(ii) فئة $E = E(G)$ من أزواج غير مرتبة من رءُوس مختلفة تسمى أحـرف edges الفئة G.

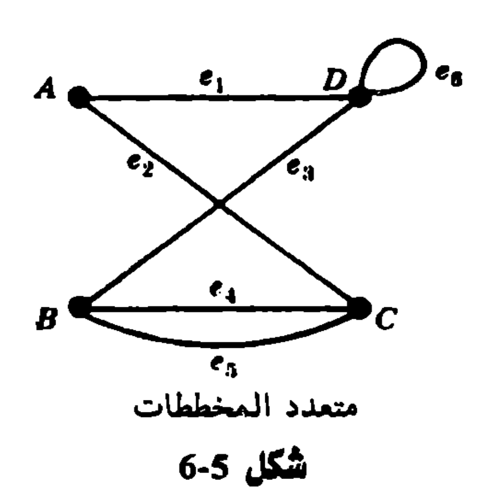
نرمز لهذا المخطط graph بـ $G(V, E)$ وهو رمز يوضح جزئى G.

الرأسان u و v يقال لهما متجاورين adjacent إذا وجد حرف Edge $e = \{u, v\}$. فى مثل هذه الحالة يسمى u و v نهايتى الحرف e وأن الحرف e يصل u و v، يقال أيضًا أن الحرف e يصب incident فى كل من نقطتى نهايتيه u و v.

ترسم المخططات فى المستوى بطريقة طبيعية، بالتحديد كل رأس v فى الفئة V يمثل بنقطة (أو دائرة صغيرة) وكل حرف edge $e = \{v_1, v_2\}$ يمثل بمنحنى يربط نقطتى نهايته v_1 و v_2.

متعددو المخططات Multigraphs

بالنظر إلى المخطط فى شكل 6-5 فإن الحرفين e_4 و e_5 يسميان أحرفًا متعددة multiple edges لأنهما يصلان بين نفس النهايتين B، C وكذلك الحرف e_6 يسمى عروة loop حيث نهايتيه عند نفس الرأس D. هذا المخطط يسمى متعدد المخططات multigraph. التعريف الشائع للمخطط graph لا يسمح بتعدد الأحرف ولا بالعروة. ولهذا يمكن تعريف المخطط بأنه متعدد المخططات بدون أحرف متعددة أو عروات.



متعدد المخططات

شكل 6-5

درجة الرأس Degree of a Vertex

درجة الرأس v فى المخطط G، وتكتب $\deg(v)$، تساوى عدد الأحرف فى G

التى تحتوى v. وبما أن كل حرف يعد مرتين عند حساب درجة الرءُوس فى G فيكون لدينا النتيجة البسيطة والهامة التالية.

نظرية 6.1: مجموع درجات الرؤوس فى المخطط G يساوى ضعف عدد الأحرف فى G.

الرأس الذى درجته صفرًا يسمى رأسًا منعزلاً isolated.

المخططات المنتهية والمخطط التافه Finite Graphs; Trivial Graph

متعدد المخططات يقال له منتهيًا إذا كان له عدد محدود من الرءُوس وعدد محدود من الأحرف. ويلاحظ أنه إذا كان المخطط يحوى عدداً محدوداً من الرءُوس فإنه يحوى عدداً محدوداً من الأحرف، وبالتالى يجب أن يكون مخططا منتهيًا. المخطط المنتهى والذى له رأس واحدة ولا يوجد له أحرف (أى النقطة المنفردة) يسمى المخطط التافه trivial graph.

المخططات الجزئية؛ المخططات أحادية التشاكل ومخططات التوءمة

Subgraphs; Isomorphic and Homeomorphic Graphs

المخططات الجزئية Subgraphs

إذا كان $G = G(V, E)$ مخططًا فإن المخطط $H = H(V', E')$ يسمى مخططًا جزئيًا subgraph للمخطط G إذا كانت رؤوس وأحرف H محتواه فى رءُوس وأحرف G، أى إذا تحقق $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$. ونخصص:

(i) المخطط الجزئى $H(V', E')$ من $G(V, E)$ يسمى المخطط الجزئى المتولد induced بواسطة رءُوسه V' إذا كانت فئة الأحرف E' تحتوى على جميع الأحرف فى G التى نقط نهايتها تحتوى على رءُوس فى H.

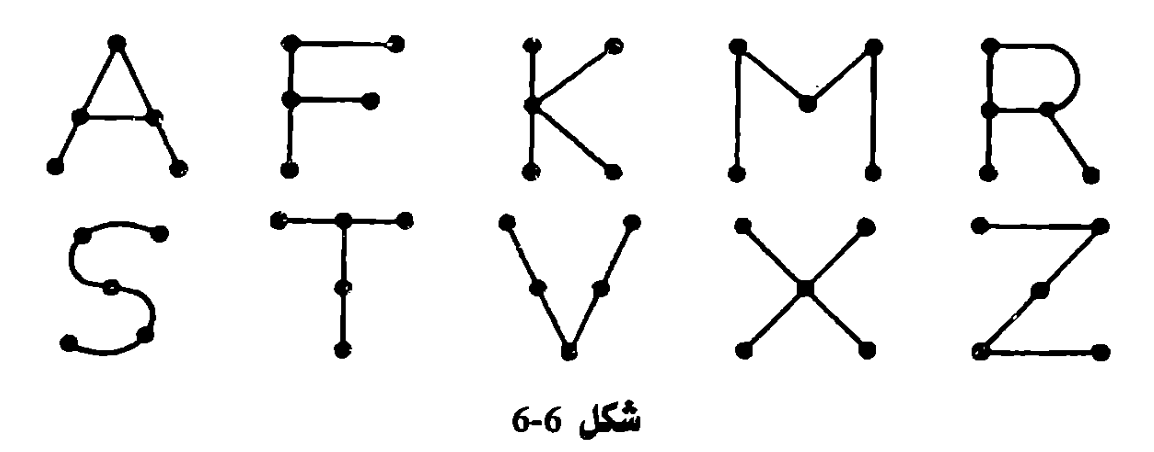
(ii) إذا كانت v أحد الرءُوس فى G، فإن المخطط الجزئى $G - v$ من

المخطط G هو المخطط الذى يتم الحصول عليــه بحـذف v مـن G وكذلك حذف كل الأحرف المحتوية على v.

(iii) إذا كان e أحد الأحرف فى G فإن $G-e$ هو مخطط جزئى مــن G نحصل عليه بحذف الحرف e من G.

المخططات أحادية التشاكل Isomorphic Graphs

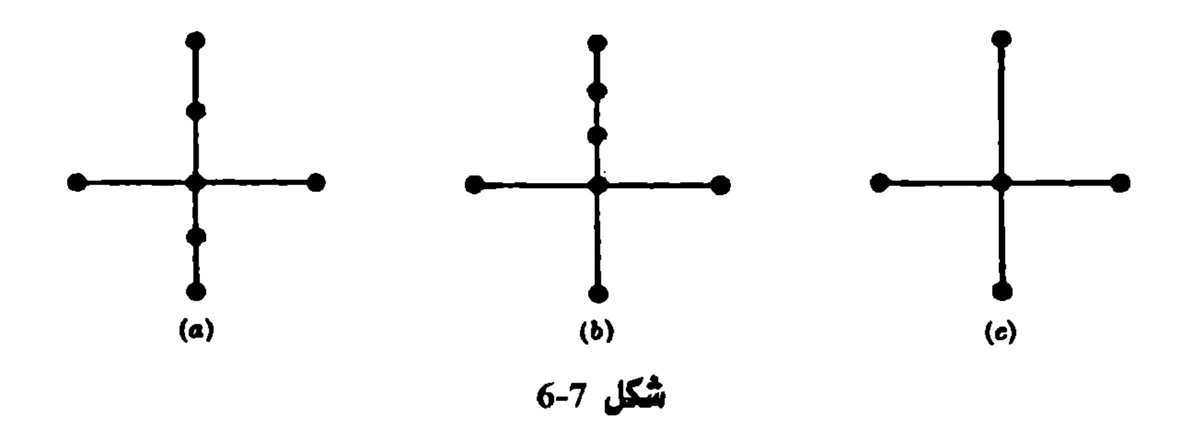
يقال للمخططين $G = G(V, E)$، $G^* = H^*(V^*, E^*)$ أنــهما فـى تشــاكل أحــادى isomorphic إذا وجد تناظر أحادى $f: V \to V^*$ بحيث يكون $\{u, v\}$ حرفًا فى G إذا، وفقط إذا، كان $\{f(u), f(v)\}$ حرفًا فى G^*. وعادة لا نفرق بين المخططات التى فى تشاكل أحادى حتى لو كان تخطيطها يبدو مختلفًا. شكل 6-6 يعطــى 10 مخططات مصورة كحروف. نلاحظ أن A و R همــا مخططــان فــى تشــاكل أحادى. أيضًا F و T، K و X، M، S، V و Z مخططات فى تشاكل أحادى.



شكل 6-6

مخططات التوءمة Homeomorphic Graphs

إذا أعطينا مخططًا G، يمكننا الحصول على مخطط جديد بتقسيم أى حرف مـن G بإضافـة رءُوس. المخططـان G، G^* يقــال لــهما مخططــى توءمــة homeomorphic إذا أمكـن الحصـول عليـهما مـن نفـس المخطــط أو مــن مخططات فى تشاكل أحادى بهذه الطريقة. المخططات (a) و (b) فــى شكــل 6-7 ليسا فى تشاكل أحادى ولكنهما مخططى توءمة، لأنــه يمكـن الحصـول عليهما من الرسم (c) بإضافة رءُوس مناسبة.



شكل 6-7

المسارات؛ الترابط Paths; Connectivity

المســار path فـي متعـدد المخططـات G هـو متتابعـة تناوبيـة مـن الـرءُوس والأحرف على الشكل

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n$$

حيث كل حرف e_i يحتوى على الرأسين v_{i-1} و v_i اللذين يظهران على جانبى e_i فى المتتابعة. عدد الأحرف n يسمى طـول المسـار. عندمـا تكـون الأشيـاء واضحة نرمز للمسار بمتتابعة رءُوسه $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$. يقال أن المســـار مغلـق إذا كانت $v_0 = v_n$. فى غير ذلك نقول أن المسار من v_0 إلى v_n، أو أنــه بيـن v_0 و v_n ، أنه يصل بين v_0 و v_n .

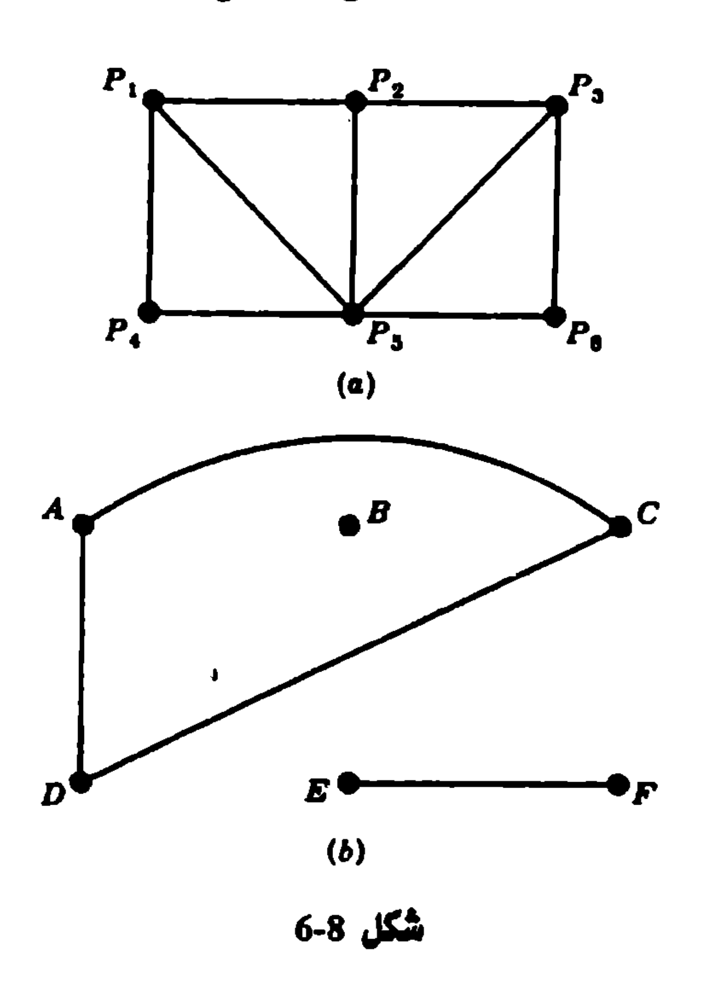
المســـار البسـيط simple path هـو مســار جميـع رءُوسـه مختلفـــة. أمـــا المسار الذى فيه جميع الأحرف مختلفة فيقال له ذيـلا trail. والـدورة cycle هى مسار مغلق طوله 3 أو أكثر وكل رءُوسه مختلفة ماعدا $v_0 = v_n$. الـدورة التى طولها k تسمى دورة من طول k-cycle. بحذف الأحـرف غـير الضروريـة ليس من الصعب أن نرى أن المســـار مـن الـرأس u إلـى الـرأس v يسـتبدل بالمسار البسيط من u إلى v. ونعرض هذه النتيجة فيما يلى:

نظرية 6.2: يوجد مسار من الرأس u إلى الرأس v إذا، وفقط إذا، وجد مسار بسيط من u إلى v.

الترابط والمركبات المترابطة

Connectivity; Connected Components

المخطط G يكـون مترابطًا connected إذا وجد مسار بين أى اثنين من رءوسه. المخطط في شكل 6-8(*a*) مترابط، لكن المخطط في شكل 6-8(*b*) غير مترابط لأنه مثلاً لا يوجد مسار بين الرأسين D و E.



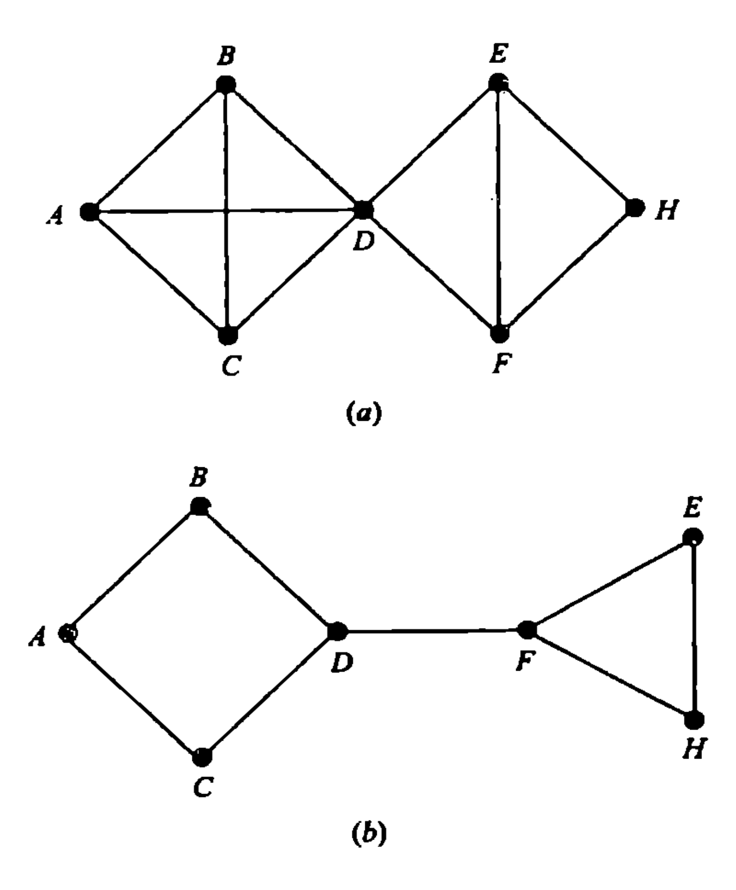
شكل 6-8

ليكن G مخطط ما. المخطط الجزئى المترابط H من G يسمى مركبة مترابطة connected component من G، إذا كانت H غير محتواة فى أى مخطط جزئى مترابط من G أكبر منها. من البديهى أن أى مخطط G يمكن تجزئته إلى مركباته المترابطة. فمثلاً مخطط G فى شكل 6-8(*b*) له ثلاث مركبات مترابطة: المخطط الجزئى المتولد من فئات الرءوس $\{A, C, D\}$، $\{E, F\}$، $\{B\}$.

الرأس B فى شكل 6-8(b) تسمى رأسًا منفردة أو منعزلة لأن B لا تنتمى إلى أى حرف. وبعبارة أخرى $\deg(B) = 0$. ولهذا كما هـو ملاحـظ فـإن B نفسها تشكل مركبة مترابطة للمخطط.

المسافة والقطر Distance and Diameter

نعتبر المخطط المترابط G. المسافة بين الرأسين u و v فى G وتكتب $d(u, v)$ هى طول أقصر مسـار بيـن u و v. قطـر المخطـط G ويكتـب $\text{diam}(G)$ هـو أكبر مسافة بيـن أى نقطتيـن فـى G. فمثـلاً فـى شكـل 6.9(a)، $d(A, F) = 2$ و $\text{diam}(G) = 3$ بينما فى شكل 6-9(b)، $d(A, F) = 3$ و $\text{diam}(G) = 4$.



شكل 6-9

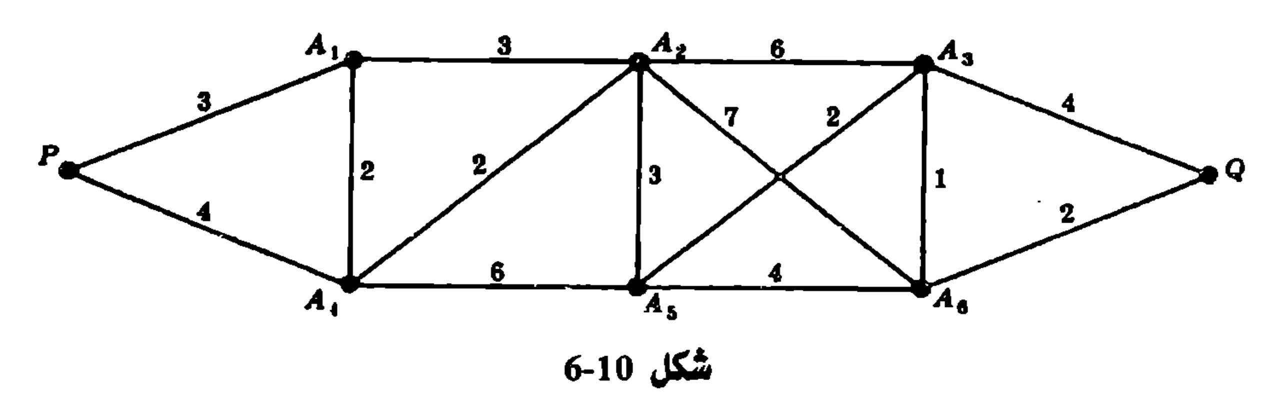
نقاط القَطع والمعابر Cutpoints and Bridges

إذا كان G مخططًا مترابطًا فإن الرأس v فى G تسمى نقطة قطع cutpoint إذا كان $G - v$ غير مترابط. الحرف e فى G يسمى معبرًا bridge إذا كان $G - e$ غير مترابط. فى الشكل 6-9(a) الرأس D هى نقطة قطع ولا توجد معابر. فى شكل 6-9(b) الحرف $e = \{D, F\}$ هو معبر.

المخططات المعلّمة والموزونة

Labeled and Weighted Graphs

المخطط G يسمى مخطط معلّما إذا أُسْنِدت لأحرفه و/أو لرءُوسه بيانات من نوع أو آخر. بالأخص، يسمى G مخططًا موزونًا إذا تم تخصيص عدد غير سالب $w(e)$ لكل حرف e من G يسمى وزن أو طول e. شكل 6-10 يوضح مخططًا موزونًا حيث وزن كل حرف معطى بطريقة واضحة. وزن (أو طول) المسار فى هذا المخطط G الموزون يُعرف بأنه مجموع أوزان الأحرف فى مجموع المسار. إحدى أهم المسائل فى نظرية المخططات هى إيجاد أقصر مسار، أى المسار الذى له أقل وزن بين أى رأسين معينين. فى شكل 6-10 طول أقصر مسار بين P و Q هو 14.



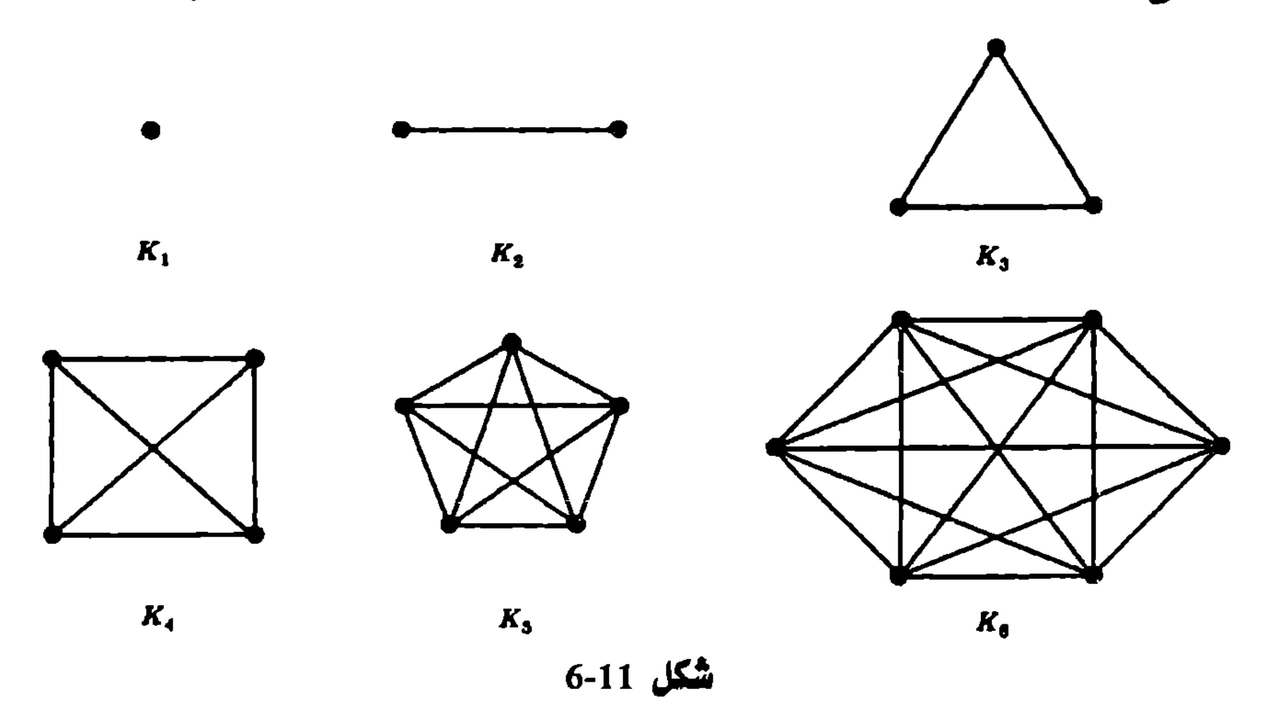
شكل 6-10

المخططات التامة والنظامية وثنائية التجزىء

Complete, Regular, and Bipartite Graphs

توجد أنواع عديدة ومختلفة من المخططات. وفى هذا البند نعتبر ثلاثة أنواع منها

وهى: المخططات التامة والمخططات النظامية والمخططات ثنائية التجزىء.



شكل 6-11

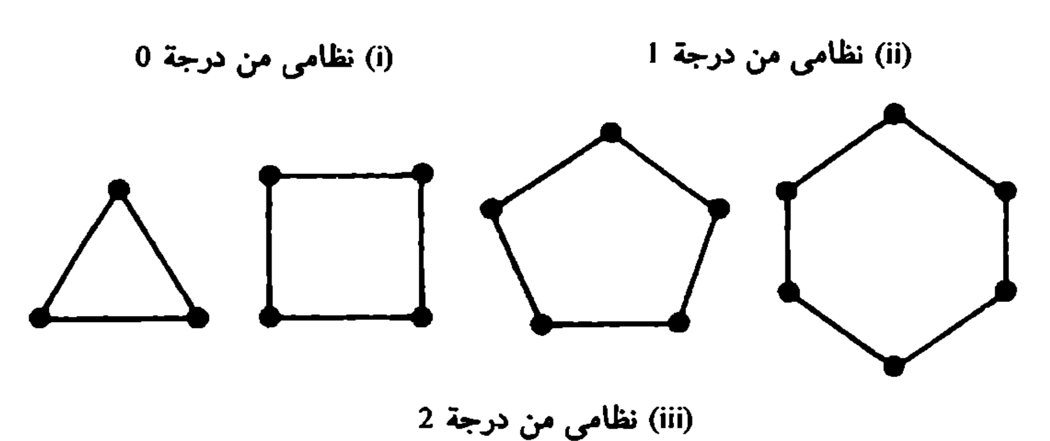
المخططات التامة Complete Graphs

يقال للمخطط G أنه تام إذا كانت كل رأس فى G موصولة بكل رأس أخرى فى G. ولذلك فالمخطط التام G يجب أن يكون مترابطًا. المخطط التام ذو n من الرُءُوس يرمز له بـ K_n. شكل 6-11 يوضح المخططات من K_1 حتى K_6.

المخططات النظامية Regular Graphs

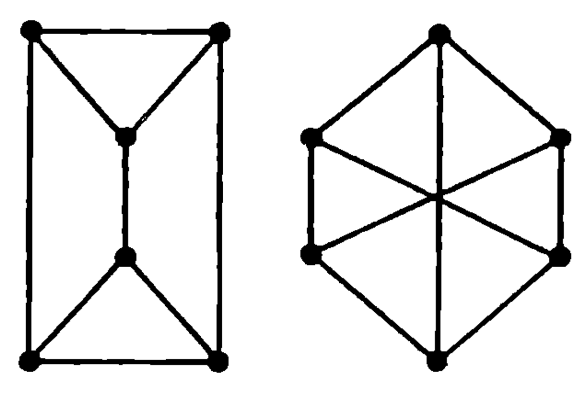
يقال للمخطط G أنه نظامى من درجة k إذا كانت كل رأس من رُءُوسه من درجة k. وبعبارة أخرى يكون المخطط نظاميًا إذا كانت كل رُءُوسه من نفس الدرجة.

المخططات النظامية المترابطة من درجة 0، 1، 2 يمكن وصفها بسهولة. المخطط المترابط النظامى من درجة 0 هو مخطط بسيط له رأس واحدة وليست له أحرف. والمخطط المترابط من درجة 1 هو مخطط مكون من رأسين وحرف واحد يصل بينهما. والمخطط المترابط النظامى من درجة 2 وله n من الرُءُوس هو مخطط يتكون من دورة واحدة من رتبة n. شكل 6-12 يوضح ذلك.



شكل 6-12

المخططات النظامية من درجة 3 يجب أن يكون لها عدد زوجى من الرُءُوس لأن مجموع درجات الرُءُوس عدد زوجى (نظرية 6.1). شكل 6-13 يوضح مخططين مترابطين نظاميين من درجة 3 ولهما 6 من الرُءُوس. وعمومًا فالمخططات النظامية يمكن أن تكون أكثر تعقيدًا. فمثلاً يوجد 19 مخططًا نظاميًا من درجة 3 كل منها يحتوى على 10 رؤوس. ونلاحظ أن المخطط التام ذى n من الرؤوس K_n هو مخطط نظامى من درجة $n - 1$.

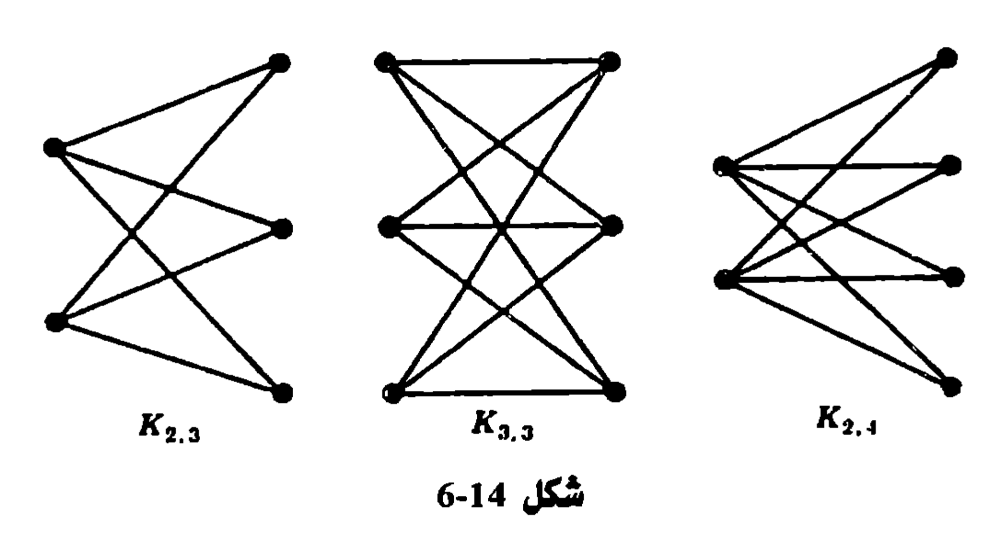


نظامى من درجة 3

شكل 6-13

المخططات ثنائية التجزىء Bipartite Graphs

يقال للمخطط G أنه ثنائى التجزىء إذا كانت رؤوسه V تُجزّأ إلى فئتين جزئيتين M و N حيث كل حرف فى G يصل رأس من M ورأس من N. نقول أن المخطط ثنائى التجزىء تام إذا كان كل رأس من M موصولة بكل رأس من N، ويرمز لهذا المخطط بـ $K_{m,n}$ حيث m عدد الرُءُوس فى M، و n عدد الرُءُوس فى N، ولتوحيد القياس نفرض أن $m \leq n$. شكل 6-14 يوضح المخططات $K_{2,3}$، $K_{3,3}$، $K_{2,4}$. من الواضح أن المخطط $K_{m,n}$ له عدد mn من الأحرف.



شكل 6-14

المخططات الشجرية Tree Graphs

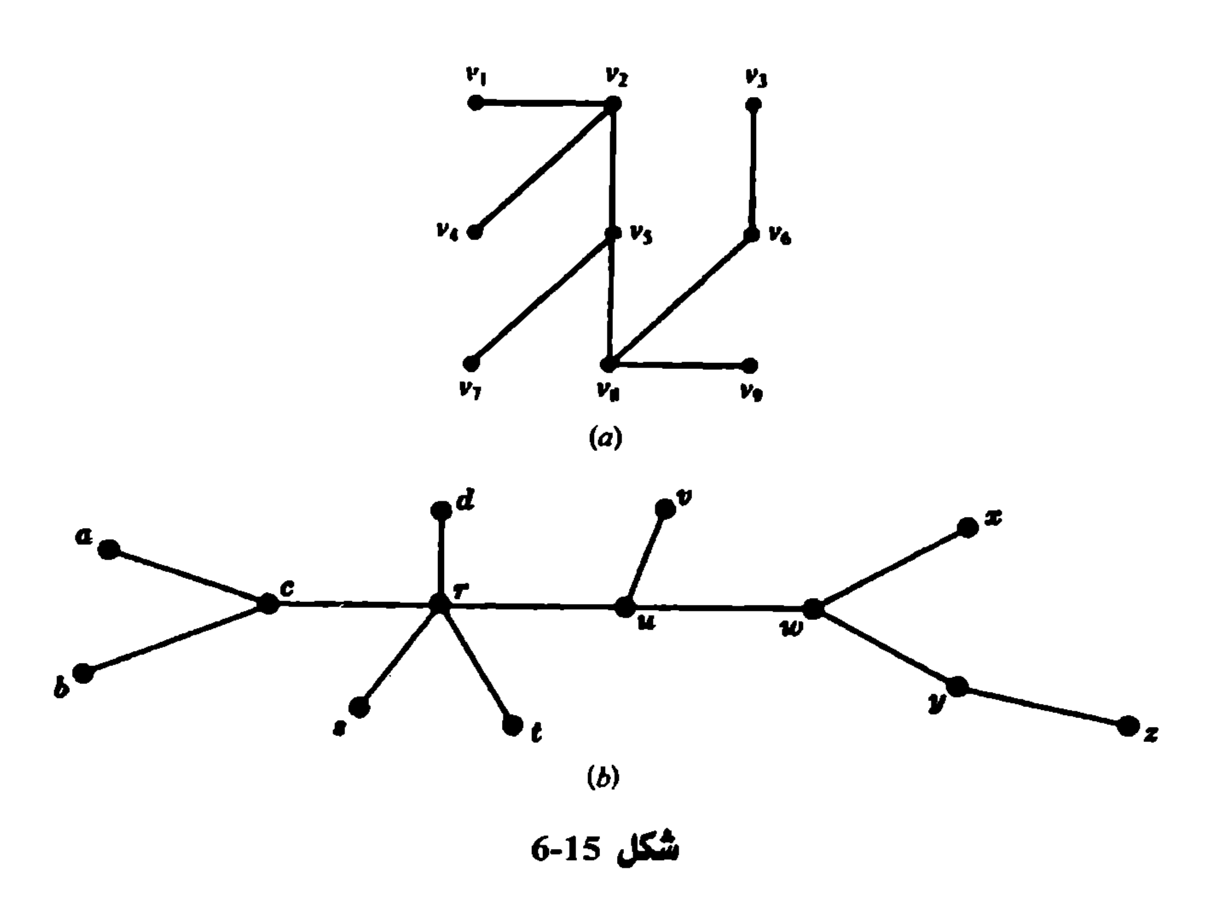
المخطط T يسمى شجرة tree إذا كان T مترابطًا وليس به دورات. أمثلة للأشجار موضحة فى شكل 6-15. الغابة forest G هى مخطط ليس به دورات. إذًا المركبات المترابطة للغابة G هى أشجار trees. الشجرة المكونة من رأس منفردة بدون أحرف تسمى شجرة مُنحلّة degenerate tree.

لتكن T شجرة ما. فالواضح أنه يوجد مسار بسيط واحد فقط بين أى رأسين فى الشجرة T . وفى غير ذلك فإن المسارين سوف يكوّنان دورة. أيضًا:

(a) بفرض عدم وجود حرف $\{u, v\}$ فى T وأضفنا الحرف $e = \{u, v\}$ لـ T، فإن المسار البسيط من u إلى v فى T مع الحرف e سوف يكونان دورة وبذلك لم تعد T شجرة.

(b) من ناحية أخرى، نفرض وجود حرف $e = \{u, v\}$ فى T وحذفنا e من T وبالتالى T لم تعد مترابطة (لأنه لا يوجد مسار من u إلى v). إذاً T لم تعد شجرة.

النظرية التالية صحيحة عندما تكون المخططات منتهية:



شكل 6-15

نظرية 6.3: ليكن G مخططاً ذى $n > 1$ من الرُءُوس. عندئذ تكون التقارير التالية متكافئة:

(i) G شجرة.

(ii) G ليس به دورات وله $n - 1$ من الأحرف.

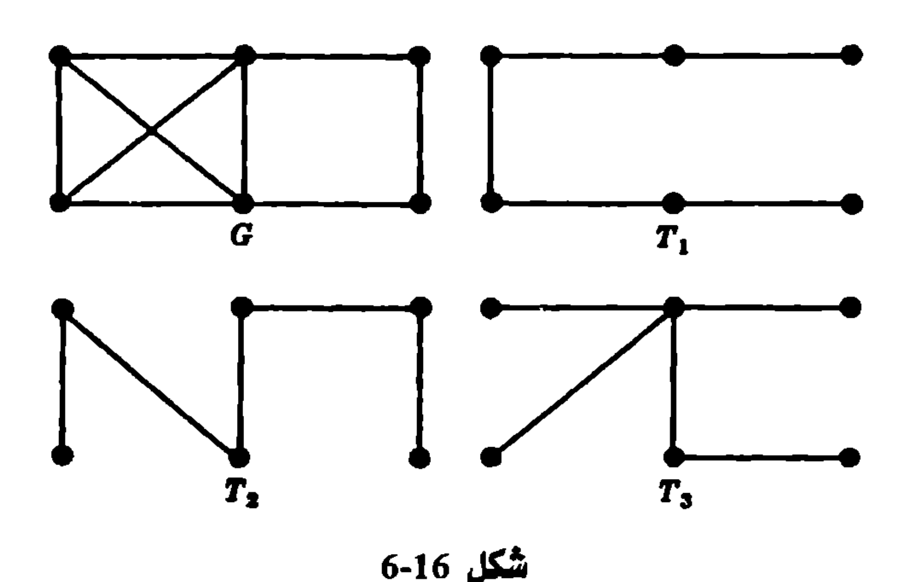
(iii) G مترابط وله $n - 1$ من الأحرف.

هذه النظرية تخبرنا أيضًا أن الشجرة T المنتهية ولها n من الرُءُوس يجب أن يكون لها $n - 1$ من الأحرف. مثلاً الشجرة فى شكل 6-15(a) لها 9 رُءُوس

و 8 أحرف، والشجرة فى شكل 6-15(*b*) لها 13 رأسًا و 12 حرفًا.

الأشجار المولّدة Spanning Trees

المخطط الجزئى T من المخطط المترابط G يسمى الشجرة المولّدة للمخطط G، إذا كانت T شجرة و T تحتوى كل الرُءُوس التى فى G. شكل 6-16 يوضح المخطط المترابط G والأشجار T_1، T_2 و T_3 المولدة للمخطط G.



شكل 6-16

الأشجار المولّدة الأقل Minimum Spanning Trees

إذا كان G مخططًا مترابطًا موزونًا: أى أن كل حرف فى G مُعين له عدد غير سالب يسمى وزن الحرف، فإن أى شجرة مولّدة للمخطط G تعين وزنًا كليًا نحصل عليه بجمع أوزان الأحرف فى T. أقل شجرة مولّدة للمخطط G هى شجرة مولّدة وزنها الكلى أصغر ما يمكن.

الخوارزميات 6.2*A*، 6.2*B* التالية تمكننا من إيجاد الأشجار مولّدة الأقل T من مخطط مترابط موزون G حيث G له n من الرُءُوس. (وفى هذه الحالة T لها $n-1$ من الأحرف).

Algorithm 6.2A The input is a connected weighted graph G with n vertices.

Step 1. Arrange the edges of G in the order of decreasing weights.

Step 2. Proceeding sequentially, delete each edge that does not disconnect the graph until $n - 1$ edges remain.

Step 3. Exit.

خوارزمية 6.2A الإدخال هو مخطط مترابط موزون G ذو n رأس.

الخطوة 1: رتب أحرف G تناقصيًا تبعًا للوزن.

الخطوة 2: واصل بالتتابع حذف كل حرف لا يقطع المخطط G حتى يبقى $n - 1$ حرفًا.

الخطوة 3: خروج.

Algorithm 6.2B (Kruskal) The input is a connected weighted graph G with n vertices.

Step 1. Arrange the edges of G in the order of increasing weights.

Step 2. Starting only with the vertices of G and proceedimg sequentially, add each edge that does not result in a cycle until $n - 1$ edges are added.

Step 3. Exit.

خوارزمية 6.2B (خوارزمية كروسكال) الإدخال هو مخطط مترابط موزون G ذو n رأس.

الخطوة 1: رتب أحرف G تزايدًا تبعًا للوزن.

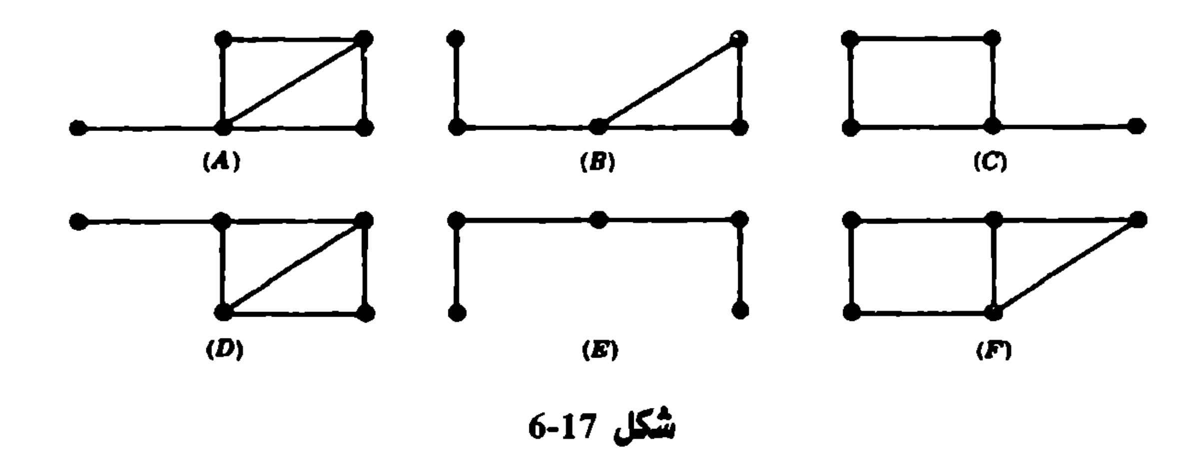
الخطوة 2: ابدأ فقط برؤوس G وواصل بالتتابع إضافة كل حرف لا يُنتج دورة حتى يضاف $(n - 1)$ من الحروف.

الخطوة 3: خروج.

وزن أقل شجرة مولّدة هو عدد وحيد ولكن أقل شجرة مولّدة ليست وحيدة. قد توجد أشجار مختلفة تصلح أن تكون (أقل شجرة مولدة) عندما يشترك حرفان أو أكثر فى نفس الوزن. وفى هذه الحالة لا يكون ترتيب الأحرف فى الخطوة I من الخوارزميتين 6.2A أو 6.2B ترتيبًا وحيدًا. وبالتالى يمكن أن تنتج أقل أشجار مولدة مختلفة.

مسألة محلولة 6.1 الشكل 6-17 يمثل مخططًا G. أوجد المخططات الجزئية التى نحصل عليها بحذف كل رأس. هل G لها أى نقط قطع؟

Solved Problem 6.1 Consider the graph G in Figure 6-17. Find the subgraphs obtained when each vertex is deleted. Does G have any cut points?

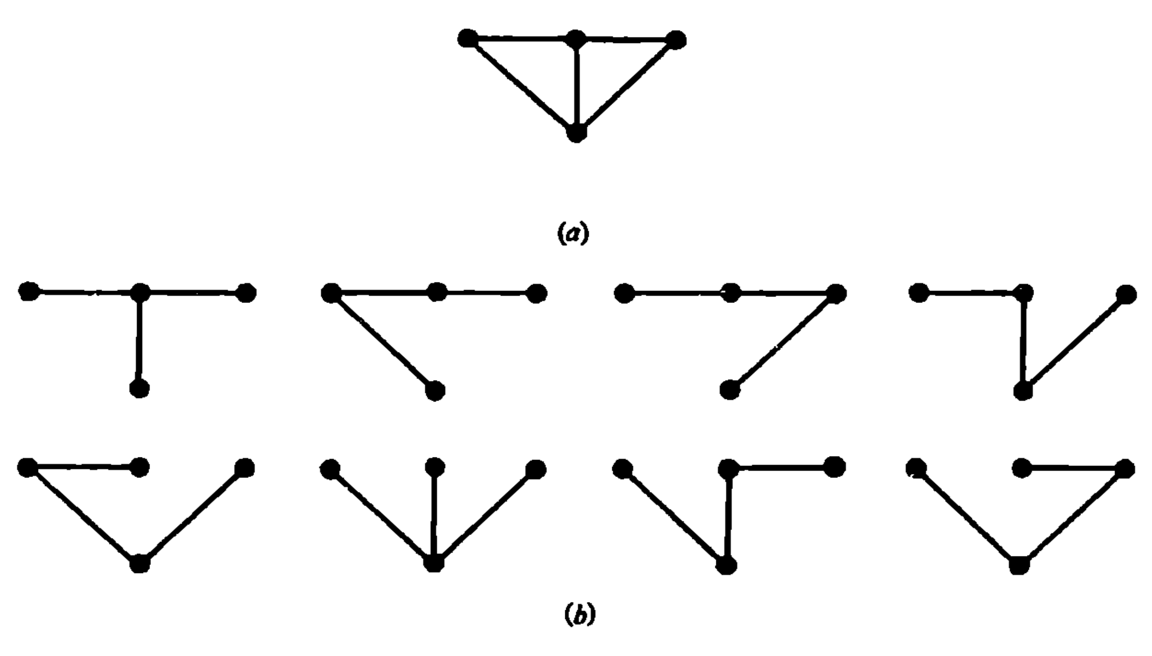


شكل 6-17

الحل. إذا حذفنا رأسًا من G فتحذف أيضًا جميع الأحرف التى تحتوى هذه الرأس. المخططات الستة التى حصلنا عليها بحذف كل رأس من G موضحة فى شكل 6-17. كل هذه المخططات مترابطة وبالتالى لا توجد نقطة قطع.

مسألة محلولة 6.2 أوجد كل الأشجار المولّدة من المخطط G الموضح فى شكل 6.18(a).

Solved Problem 6.2 Find all spanning trees of the graph G shown in Figure 6-18(a).



(a)

(b)

شكل 6-18

الحل. توجد ثمانى أشجار مولّدة من المخطط G كما هو واضح فى شكل 6-18. كل شجرة مولـدة تحتـوى علـى $4 - 1 = 3$ مـن الأحـرف حيـث G لـه أربعـة رُءُوس؛ ولذلك فإن كل شجـرة يمكـن الحصـول عليـها بحـذف حرفيـن مـن الأحرف الخمسة من G. وهذا يمكـن حدوثـه بـ 10 طـرق، إلا أن طريقتيـن منهما تؤديان إلى الحصول على مخططات غير مترابطة. ومن هنا فإن الثمانى أشجار المولّدة فى شكل (b) هى جميع الأشجار المولّدة للمخطط G.

الفصل السابع
الأشجار الثنائية
Binary Trees

فى هذا الفصل:

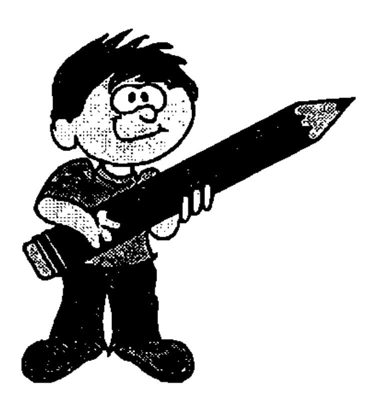
- ✔ الأشجار الثنائية
- ✔ الأشجار الثنائية التامة والممتدة
- ✔ تمثيل الأشجار الثنائية فى الذاكرة
- ✔ اجتياز الأشجار الثنائية
- ✔ أشجار البحث الثنائية

الأشجار الثنائية Binary Trees

الشجرة الثنائية T تعرَّف بأنها فئة منتهية من العناصر تسمى عُقَدًا بحيث:

1. T تكون خالية (تسمى الشجرة الخالية أو الصفرية) أو
2. T تحتوى على عقدة مميَّزة R تسمى جذراً "root of T" وباقى العُقَد فى T تكوِّن زوجًا مرتبًا من الأشجار الثنائية المنفصلة T_1، T_2.

إذا احتوت T على جذر R فإن الشجرتين T_1، T_2 تسميان الشجرة الجزئية الشمالية والشجرة الجزئية اليمينية من R على الترتيب. إذا كانت T_1 غير خالية فإن جذرها يسمى الخَلَف اليسارى left successor لـ R وبالمثل إذا كانت T_2 غير خالية فإن جذرها يسمى الخَلَف اليمينى right successor لـ R.



والتعريف السابق للشجرة الثنائية هو تعريف تكرارى لأن T تعرف بدلالة الأشجار الجزئية T_1، T_2. وهذا يعنى بالتحديد أن كل عُقْدة N فى T لها عدد 0، 1 أو 2 من الخلفاء successors. العُقَدة تسمى عُقْدةً طَرَفيه terminal node إذا لم يكن لها خلفاء. لذلك فإن الشجرتين الجزئيتين للعُقَدة الطرفية خاليتان.

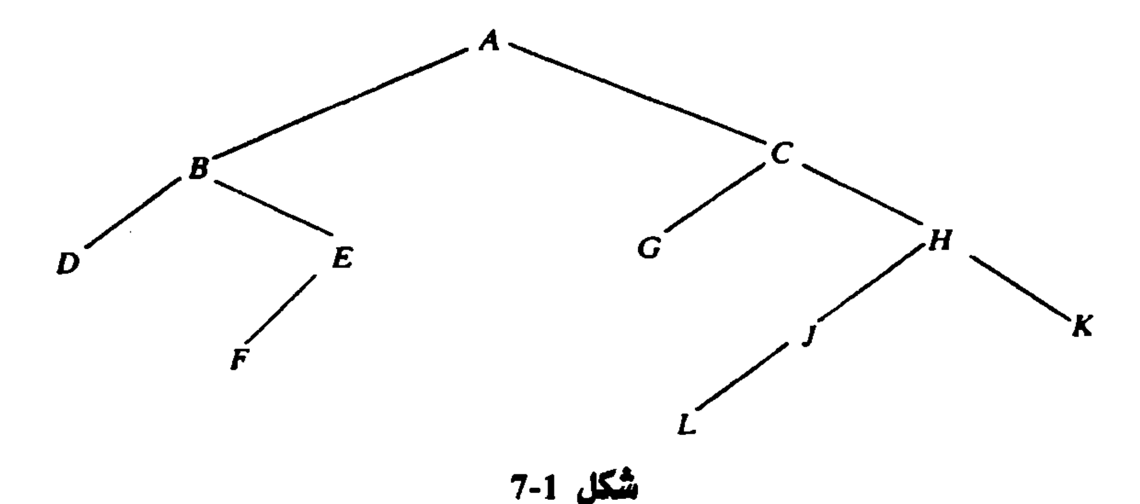
صورة الشجرة الثنائية Picture of a Binary Tree

الشجرة الثنائية T تمثل عادة بمخطط فى المستوى يسمى صورة T. بالتحديد المخطط فى شكل 7-1 يمثل شجرة ثنائية كالتالى:

(i) T مكوّنة من عدد 11 عُقْدة تمثل بالحروف من A إلى L ما عدا الحرف I.

(ii) جذر الشجرة T هو العُقْدة A فى قمة المخطط.

(iii) الخط المنحدر إلى اليسار عند أى عُقدة N يمثل خلفًا يساريًا لـ N والخط المنحدر إلى اليمين عند N يمثل خلفًا يمينيًا للعُقدة N.



شكل 7-1

وعلى ذلك ففى شكل 7-1:

(a) B خلف يسارى، C خلف يمينى للجذر A.

(b) الشجرة الجزئية اليسرى للجذر A تتكون من العُقَد B، D، E، F.
والشجرة الجزئية اليمنى لـ A تتكون من العُقَد C، G، H، J، K، L.

(c) لكل من العُقَد A، B، C، H خلفان، بينما لكل من العقدتين E، J خلف واحد فقط. أما العُقَد D، F، G، L، K فليس لأى منها خلفاء، أى أنها عُقَد طرفية.

التعبيرات الجبرية Algebraic Expressions

اعتبر التعبير الجبرى E الذى يحوى فقط عمليات ثنائية مثل

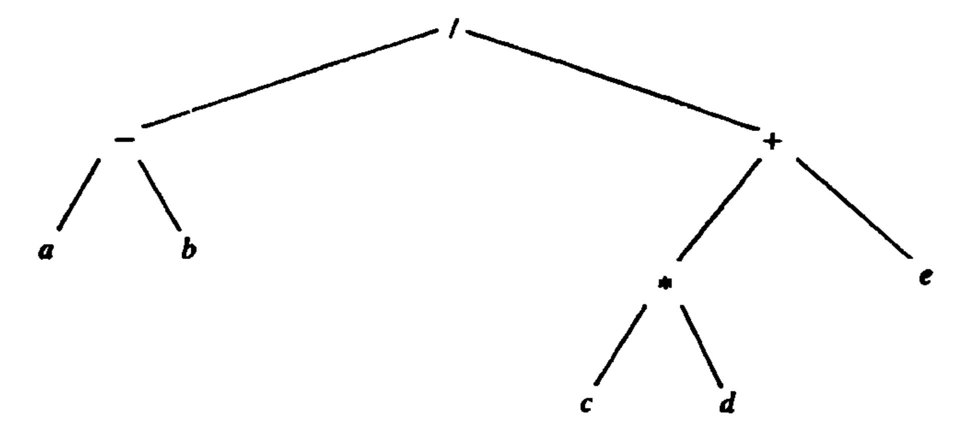
$$E=(a-b)/((c*d)+e)$$

يمكن تمثيل E بواسطة الشجرة الثنائية T المصورة فى شكل 2-7. بمعنى أن كل متغير أو ثابت فى E يظهر كعُقدة داخلية فى T حيث الأشجار الجزئية اليسارية واليمينية تناظر معامِلات Operands العمليات. فمثلاً

(a) فى التعبير E، معامِلات عملية الجمع + هى c * d و e.

(b) فى الشجرة T، الأشجار الجزئية للعُقدة + تناظر التعبيرات الجزئية c * d و e.

من الواضح أن كل تعبير جبرى يناظر شجرة وحيدة والعكس بالعكس.



$E=(a-b)/((c*d)+e).$

شكل 2-7

المصطلحات Terminology

المصطلحات التى تصف العلاقات العائلية تستخدم كثيرًا لوصف العلاقات بين عُقد الشجرة T. وعلى وجه الخصوص نفرض أن N عُقدة ما فى T ولها خلف يسارى S_1 وخلف يمينى S_2. عندئذٍ تسمى N والدًا (أو أبا) لكل من S_1، S_2. وبالمثل S_1 يسمى الطفل (أو الابن) الأيسر للعُقدة N، S_2 يسمى الطفل (أو الابن) الأيمن للعُقدة N. وأكثر من ذلك فإن S_1، S_2 يسميان أخين. كل عُقدة فى الشجرة الثنائية T، ما عدا الجذر، لها والد وحيد يسمى السلف (الجد) predecessor لـ N.

والمصطلحان سليل descendant، الجد الأعلى ancestor لهما نفس المعانى المعتادة أى أن العُقدة L تسمى سليل العُقدة N (N تسمى سلف L) إذا وجد تتابع من الأطفال من N إلى L. وخصوصًا L تسمى سليلاً يساريًا أو يمينيًا لـ N وفقًا لكون L تنتمى إلى شجرة جزئية يسارية أو يمينية من N.

المصطلحات من نظرية المخططات وعلم البساتين تستخدم أيضًا فى الشجرة الثنائية T. خصوصًا الخط المرسوم من العُقدة N فى T للتالى (للخَلَف) تسمى حرفًا edge ومتتابعة الأحرف المتتالية تسمى مسارًا path. والعُقدة الطرفية تسمى ورقة leaf، والمسار المنتهى إلى ورقة يسمى فرعا branch.

كل عُقدة فى الشجرة الثنائية T تُعطَى عددًا هو رقم المستوى level number كالتالى: الجذر R للشجرة T يُخصص له المستوى رقم صفر وكل عُقدة أخرى يُخصص لها رقم المستوى أكبر بواحد من رقم مستوى والدها. وأكثر من ذلك، العُقد التى لها نفس رقم المستوى يقال أنها من نفس الجيل generation.

أما عُمق (أو ارتفاع) الشجرة T فهو أكبر عدد من العُقد فى فرع ما فى الشجرة T. هذا العدد يكون أكبر بواحد أو أزيد من أكبر رقم مستوى للشجرة T. الشجرة T فى شكل 1-7 عمقها 5.

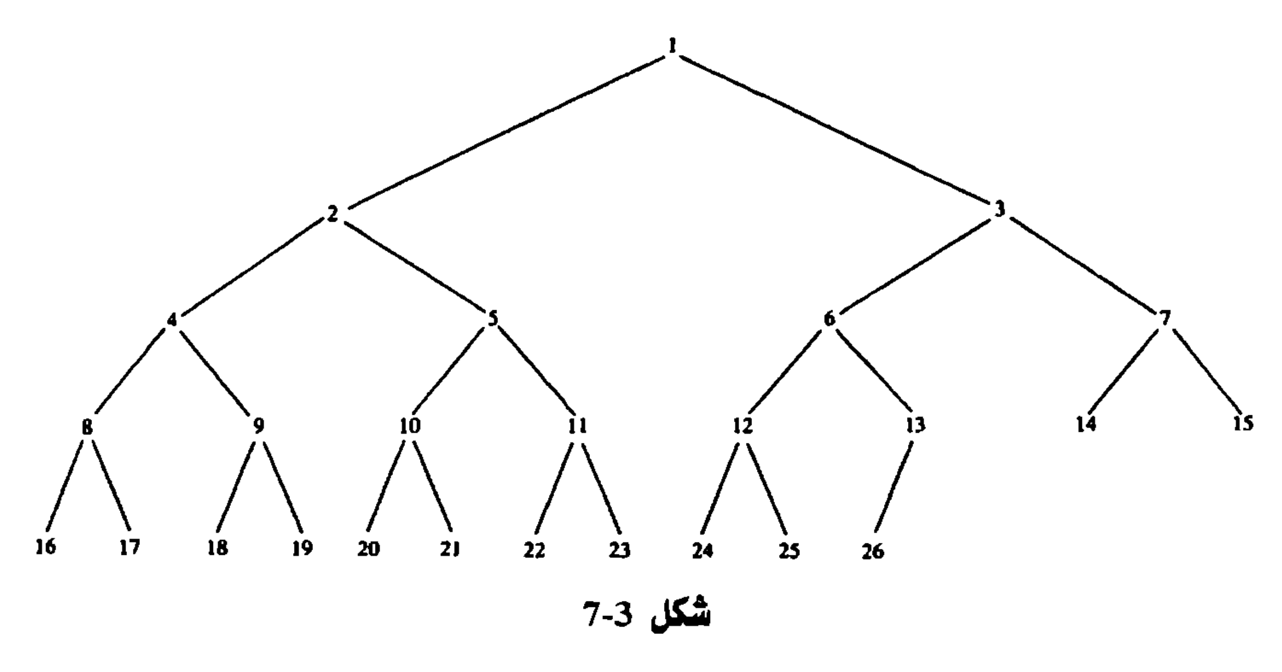
الأشجار الثنائية التامة والممتدة

Complete and Extended Binary Trees

فى هذا البند نعتبر نوعين خاصين من الأشجار الثنائية:

الأشجار الثنائية التامة Complete Binary Trees

نعتبر شجرة ثنائية T. كل عُقدة فى T يمكن أن يكون لها طفلان على الأكثر. هذا يبين أن المستوى r للشجرة T له على الأكثر 2^r عُقدة. الشجرة T يقال أنها تامة إذا كانت جميع مستوياتها، ربما فيما عدا الأخير، لها أكبر عدد مُمكن من العُقَد، وإذا كانت جميع العُقد فى المستوى الأخير تظهر أبعد ما يمكن إلى اليسار. وبذلك توجد شجرة تامة وحيدة T_n لها بالضبط n عُقدة (بالطبع أهملنا محتويات العُقَد). الشجرة التامة T_{26} وبها 26 عُقدة تظهر فى شكل 3-7.



شكل 3-7

العُقد فى الشجرة الثنائية التامة T_{26} فى شكل 3-7 تم ترقيمها بالأعداد الصحيحة 1، 2، ......، 26 من اليسار إلى اليمين، جيل بعد جيل. بهذا الترقيم يمكننا بسهولة تحديد الأطفال والوالد لأى عُقدة K فى أى شجرة تامة T_n. وعلى وجه الخصوص، فإن الطفل الأيسر والطفل الأيمن للعُقدة K، هما على الترتيب، $2 * K$، $2 * K + 1$، ووالد K هو العُقدة $[K/2]$. فمثلاً

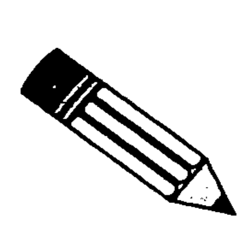
أطفال العُقدة 9 هما العُقَدتان 18، 19 ووالدها هو 4 = [9/2]. العمق d_n للشجرة التامة T_n وبها n عُقدة يعطى بالعلاقة

$$d_n = \lfloor \log_2 n + 1 \rfloor$$

وهذا عدد صغير نسبيًا. فمثلاً إذا كانت الشجرة التامة T_n تحتوى على $n = 1,000,000$ عُقدة فإن عمقها $d_n = 21$.

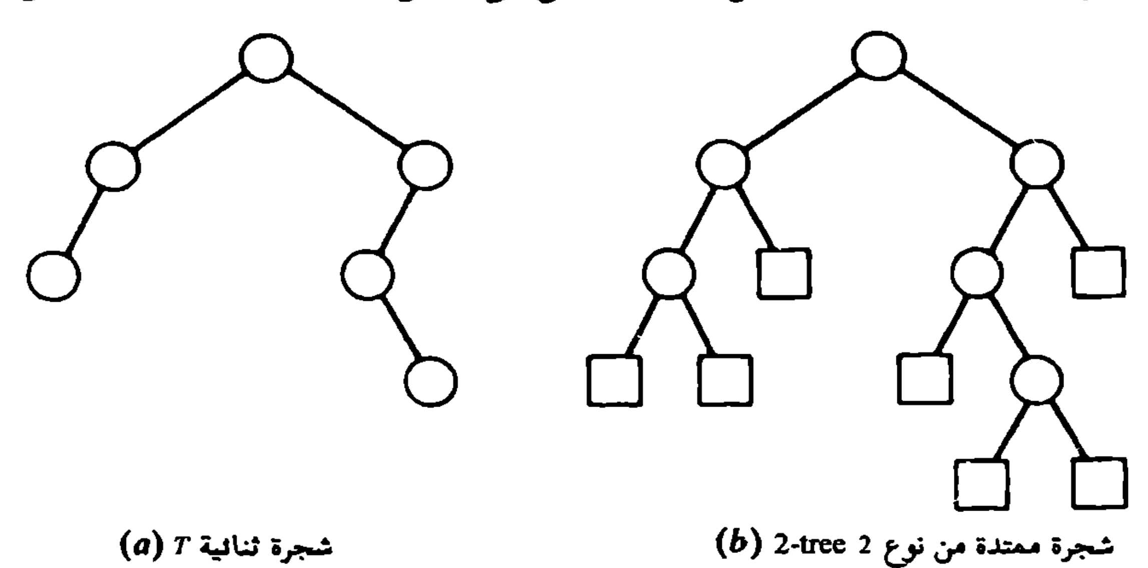
الأشجار الثنائية الممتدة: الأشجار من نوع 2

Extended Binary Trees: 2-Trees



يقال للشجرة الثنائية T أنها من نوع 2 أو شجرة ثنائية ممتدة إذا كانت كل عُقدة N لها إما صفر وإما اثنان من الأطفال. فى هذه الحالة تسمى العُقد التى لها اثنان من الأطفال عُقدًا داخلية والعُقد التى لها صفر من الأطفال عُقدًا خارجية. أحيانًا نميز بين العُقد الداخلية والخارجية فى مخطط الشجرة بالدوائر والمربعات على الترتيب.

المصطلح "الشجرة الثنائية الممتدة" حصلنا عليه من العملية الآتية. نعتبر أى شجرة ثنائية T مثل الشجرة التى فى شكل 7-4(a). الشجرة T يمكن



(a) شجرة ثنائية T — (b) شجرة ممتدة من نوع 2 2-tree

شكل 7-4

أن تحول إلى شجرة من نوع 2 بأن نضع بدلاً من كل شجرة جزئية خالية عُقدة جديدة كما فى شكل 7.4(b).

لاحظ أن الشجرة الجديدة هى فعلاً شجرة من النوع 2. وإضافة إلى ذلك، فالعُقد فى الشجرة الأصلية أصبحت الآن عُقداً داخلية فى الشجرة الممتدة والعُقد الجديدة أصبحت عُقَدًا خارجية فى الشجرة الممتدة.

تمثيل الأشجار الثنائية فى الذاكرة

Representing Binary Trees in Memory

لتكن T شجرة ثنائية. يناقش هذا البند طريقتين لتمثيل T فى الذاكرة. الطريقة الأولى المعتادة تسمى تمثيل الوصلة link representation لـ T وهى تشابه الطريقة التى مُثلت بها القوائم الموصولة فى الذاكرة. أما الطريقة الثانية فتستخدم مصفوفة واحدة single array تسمى التمثيل التتابعى sequential representation للشجرة T. أهم ما يطلب فى أى تمثيل للشجرة هو إمكانية الوصول access المباشر للجذر R للشجرة T. وإذا أعطينا أى عُقدة N للشجرة T فإنه يجب أن تكون لدينا إمكانية للوصول مباشرة إلى أطفال N.

التمثيل الموصول للأشجار الثنائية

Linked Representation of Binary Trees

لتكن T شجرة ثنائية. إذا لم يذكر عكس ذلك، فإن T سوف تحفظ فى الذاكرة بواسطة تمثيل موصول يستخدم ثلاث منظومات متوازية INFO، LEFT، RIGHT ومؤشر متغير ROOT كالتالى. قبل كل شىء، كل عُقدة N للشجرة T تناظر موقعًا ما K بحيث:

1. INFO[K]: تحتوى على البيانات التى عند العُقدة N.
2. LEFT[K]: تحتوى على موقع الطفل الأيسر للعُقدة N.
3. RIGHT[K]: تحتوى على موقع الطفل الأيمن للعُقدة N.

وزيادة على ذلك، المؤشر ROOT سوف يحتوى على موقع الجذر R للشجرة T.
إذا كانت أى شجرة جزئية خالية، فإن المؤشر المناظر سوف يحتوى على القيمة الصفرية، وإذا كانت الشجرة T نفسها خالية فإن المؤشر ROOT سوف يحتوى على القيمة الصفرية.

التمثيل التتابعى للأشجار الثنائية

Sequential Representation of Binary Trees

لنفرض أن T شجرة ثنائية تامة أو شبه تامة. توجد طريقة فعالة لحفظ T فى الذاكرة تسمى التمثيل التتابعى للشجرة T.

هذا التمثيل يستخدم فقط منظومة خطية واحدة TREE مع مؤشر متغير END كالتالى:

(*a*) الجذر R للشجرة T يخزَّن فى TREE[1].

(*b*) إذا شغلت عُقدة ما N المنظومة الخطية TREE[K] فإن طفلها الأيسر يخزَّن فى TREE[2 * K] وطفلها الأيمن يخزَّن فى TREE[2 * K + 1].

(*c*) END يحتوى على موقع العُقدة الأخيرة للشجرة T.

بالإضافة إلى ذلك، العُقدة N فى TREE[K] تحتوى على شجرة جزئية يسارية أو يمينية خالية وفقًا لكون K * 2 أو 2*K + 1 يتخطى END أو لكون TREE[2 * K] أو TREE[2 * K + 1] يحتوى على القيمة الصفرية NULL.

اجتياز الأشجار الثنائية Traversing Binary Trees

يوجد ثلاث طرق نمطية لاجتياز الشجرة الثنائية T التى جذرها R. هذه الخوارزميات الثلاث تسمى "الترتيب السابق" preorder، "الترتيب الآنى" inorder، "الترتيب اللاحق" postorder وهى كالتالى:

Preorder:
(1) Process the root R.
(2) Traverse the left subtree of R in preorder.
(3) Traverse the right subtree of R in preorder.

Inorder:
(1) Traverse the left subtree of R in inorder.
(2) Process the root R.
(3) Traverse the right subtree of R in inorder.

Postorder:
(1) Traverse the left subtree of R in postorder.
(2) Traverse the right subtree of R in postorder.
(3) Process the root R.

الترتيب السابق: (1) عالج الجذر R.
(2) اجتز الشجرة الجزئية اليسرى للجذر R فى الترتيب السابق preorder.
(3) اجتز الشجرة الجزئية اليمنى للجذر R فى الترتيب السابق preorder.

الترتيب الآنى: (1) اجتز الشجرة الجزئية اليسرى للجذر R فى الترتيب الآنى inorder.
(2) عالج الجذر R.
(3) اجتز الشجرة الجزئية اليمنى للجذر R فى الترتيب الآنى inorder.

الترتيب اللاحق: (1) اجتز الشجرة الجزئية اليسرى للجذر R فى الترتيب اللاحق postorder.
(2) اجتز الشجرة الجزئية اليمنى للجذر R فى الترتيب اللاحق postorder.
(3) عالج الجذر R.

ويلاحظ أن كل خوارزمية منها تحتوى على نفس الخطوات الثلاث وأن الشجرة الجزئية اليسرى للجذر R دائمًا تُجتاز قبل الشجرة الجزئية اليمنى. الاختلاف بين الخوارزميات الثلاث فقط فى توقيت معالجة الجذر R. وعلى وجه الدقة فى خوارزمية "سابق" "pre" يُعالج الجذر R قبل اجتياز الأشجار

الجزئية، وفى خوارزمية "آنى" "in" يُعالج الجذر R بين اجتياز الشجرتين الجزئيتين. وفى خوارزمية "لاحق" "post" يُعالج الجذر R بعد اجتياز الأشجار الجزئية.

الخوارزميات الثلاث تسمى أحيانًا، اجتياز node-left-right (NLR) واجتياز left-node-right (LNR) واجتياز left-right-node (LRN) على الترتيب.

أشجار البحث الثنائية Binary Search Trees

فى هذا البند نناقش واحدًا من أهم هياكل البيانات فى عالم الحاسب، يسمى شجرة البحث الثنائية. هذا الهيكل يمكننا من البحث عن وإيجاد العنصر فى زمن إجراء متوسطه $f(n) = 0(\log_2 n)$ حيث n عدد بنود البيانات number of data items. وهو يمكننا أيضًا من حذف أو إضافة أية عناصر بسهولة. هذا الهيكل يختلف عن الهياكل التالية:

(*a*) منظومة الفرز الخطى sorted linear array: فى هذا الهيكل نبحث عن ونجد أى عنصر فى زمن إجراء $f(n) = 0(\log_2 n)$ ولكن حذف أو إضافة أية عناصر تكون مكلِّفة لأنها فى المتوسط تتضمن تحريك $0(n)$ من العناصر.

(*b*) القائمة الموصولة linked list: هنا يمكن حذف أو إضافة أية عناصر بسهولة. لكن البحث عن وإيجاد العنصر مكلِّف لأنه يجب استخدام البحث الخطى بزمن تنفيذ $f(n) = 0(n)$.

بالرغم من أن كل عُقدة فى شجرة البحث الثنائية قد تحتوى على تسجيل تام للبيانات، فإن تعريف الشجرة يعتمد على مجال معطى قيمه مختلفة ويمكن ترتيبها.

تعريف: لتكن T شجرة ثنائية. تسمى T شجرة بحث ثنائية إذا كانت كل عُقدة N فى T لها الخاصية التالية:

قيمة N أكبر من كل قيمة فى الشجرة الجزئية اليسرى لـ N وأصغر من كل قيمة فى شجرة الجزئية اليمنى لـ N.

ليس من الصعب التحقق من أن الخاصية السابقة تضمن أن الاجتياز من النوع "ترتيب آنى" inorder لـ T يُنتج قائمة مفرزة من عناصر T.

ملاحظة: التعريف السابق لشجرة البحث الثنائية يفترض أن جميع قيم العُقد مختلفة. يوجد تعريف مشابه لشجرة البحث الثنائية يسمح بتساوى القيم بمعنى أن كل عُقدة فى هذا التعريف لها الخواص التالية:

(a) $N > M$ لكل عُقدة M فى الشجرة الجزئية اليسرى لـ N.

(b) $N \leq M$ لكل عُقدة M فى الشجرة الجزئية اليمنى لـ N.

عند استخدام هذا التعريف، يلزم تعديل العمليات التى سوف نناقشها لاحقًا بالشكل المناسب.

(a) البحث والإضافة فى شجرة البحث الثنائية

Searching and Inserting in a Binary Search Tree

فيما يلى خوارزمية للبحث والإضافة فى شجرة البحث الثنائية T.

Algorithm 7.1 A binary search tree T and an ITEM of information is given. The algorithm finds the location of ITEM in T, or inserts ITEM as a new node in the tree.

Step 1. Compare ITEM with the root N of the tree.
- (a) If ITEM $< N$, proceed to the left child of N.
- (b) If ITEM $> N$, proceed to the right child of N.

Step 2. Repeat Step 1 until one of the following occurs:
- (a) We meet a node N such that ITEM $= N$. In this case the search is successful.
- (b) We meet an empty subtree, which indicates the search is unsuccessful. Insert ITEM in place of the empty subtree.

Step 3. Exit.

خوارزمية 7.1 المعطيات: شجرة البحث الثنائية T بند معلومـات ITEM.
هدف الخوارزميـة إيجـاد موضـع ITEM فـى الشجـرة T أو إضافة ITEM كعُقدة جديدة فى الشجرة T.

الخطوة 1: قارن ITEM مع الجذر N للشجرة.
- (a) إذا كان ITEM $< N$ تابع للطفل الأيسر لـ N.
- (b) إذا كان ITEM $> N$ تابع للطفل الأيمن لـ N.

الخطوة 2: كرر الخطوة 1 حتى تحصل على أحد وضعين:
- (a) تقابل عُقدة N تحقق ITEM $= N$. فى هذه الحالة يكون البحث ناجحًا.
- (b) تقابل شجرة جزئية خالية وهذا يشير إلى أن البحث فاشل. ادخل ITEM بدلاً من الشجر الجزئية الخالية

الخطوة 3: خروج.

(b) الحذف فى شجرة البحث الثنائية **Deleting in a Binary Search Tree**: فيما يلى خوارزمية لحذف بند ما ITEM من شجـرة البحـث الثنائيـة T، وهـو يستخدم خوارزمية 7.1 لإيجاد موقع ITEM فى T.

Algorithm 7.2 A binary search tree T and an ITEM of information is given. $P(N)$ denotes the parent of a node N, and $S(N)$ denotes the inorder successor of N. The algorithm deletes ITEM from T.

Step 1. Use Algorithm 7.1 to find the location of the node N which contains ITEM and keep track of the location of the parent node $P(N)$. (If ITEM is not in T, then STOP and Exit.)

Step 2. Determine the number of children of N. There are three cases:

(*a*) N has no children. N is deleted from T by simply replacing the location of N in the parent node $P(N)$ by the NULL pointer.

(*b*) N has exactly one child M. N is deleted from T by replacing the location of N in the parent node $P(N)$ by the location of M. (This replaces N by M.)

(c) N has two children.

(i) Find the inorder successor $S(N)$ of N. (Then $S(N)$ has no left child.)

(ii) Delete $S(N)$ from T using (*a*) or (*b*).

(iii) Replace N by $S(N)$ in T.

Step 3. Exit.

خوارزمية 7.2 المعطيات: شجرة بحث ثنائية T وبند من المعلومات ITEM. P(*N*) يرمز إلى والد العقدة *N* و S(*N*) يرمز إلى خَلَف N في "الترتيب الآنى" الخوارزمية تحذف ITEM من T.

***الخطوة* 1:** استعمل الخوارزمية 7.1 لإيجاد موقع العُقدة N والتى تحتوى على ITEM واحفظ موقع عُقدة الوالد *P*(*N*) (إذا كان ITEM غير موجود فى الشجرة *T* فعندئذ قف واخرج).

***الخطوة* 2:** عين عدد أطفال *N*. توجد ثلاث حالات:

(*a*) *N* ليس له أطفال. تحذف *N* من *T* بوضع المؤشر الصفرى NULL بدلاً من *N* فى موضع عُقدة الوالد *P*(*N*).

(b) *N* له طفل واحد فقط *M*. تحذف *N* من *T* بوضع موقع *M* بدلاً من *N* فى موقع عُقدة الوالد *P*(*N*). (*M* تحل محل *N*).

(*c*) *N* له طفلان.

(*i*) أوجد الخَلَف *S*(*N*) لـ *N* التابع فى "الترتيب الآنى" عندئذ *S*(*N*) ليس له طفل أيسر.

(*ii*) احذف *S*(*N*) من *T* باستخدام (*a*) أو (*b*).

(*iii*) ضع *S*(*N*) بدلاً من *N* فى *T*.

***الخطوة* 3:** خروج.

ملاحظة: لاحظ أن الحالة (iii) فى الخطوة 2(*c*) أكثر تعقيدًا من الحالتين السابقتين. يمكن إيجاد الخلف *S*(*N*) لـ *N* فى "الترتيب الآنى" كما يلى: من العُقدة *N* تحرك يمينًا للطفل الأيمن لـ *N* ثم على التتابع فتحرك يسارًا حتى نقابل العُقدة *M* التى ليس لها طفلاً أيسر. العُقدة *M* هى الخَلَف *S*(*N*) لـ N فى "الترتيب الآنى".

مسألة محلولة 7.1 افرض أن T شجرة ثنائية مخزّنة فى الذاكرة كما فى شكل 7-5. ارسم تخطيطًا لـ T.

Solved Problem 7.1 Suppose T is the binary tree stored in memory as in Figure 7-5. Draw the diagram of T.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
INFO	20	30	40	50	60	70	80	90			35	45	55	95
LEFT	0	1	0	0	2	0	0	7			0	3	11	0
RIGHT	0	13	0	0	6	8	0	14			12	4	0	0

ROOT [5] → 5

شكل 7-5

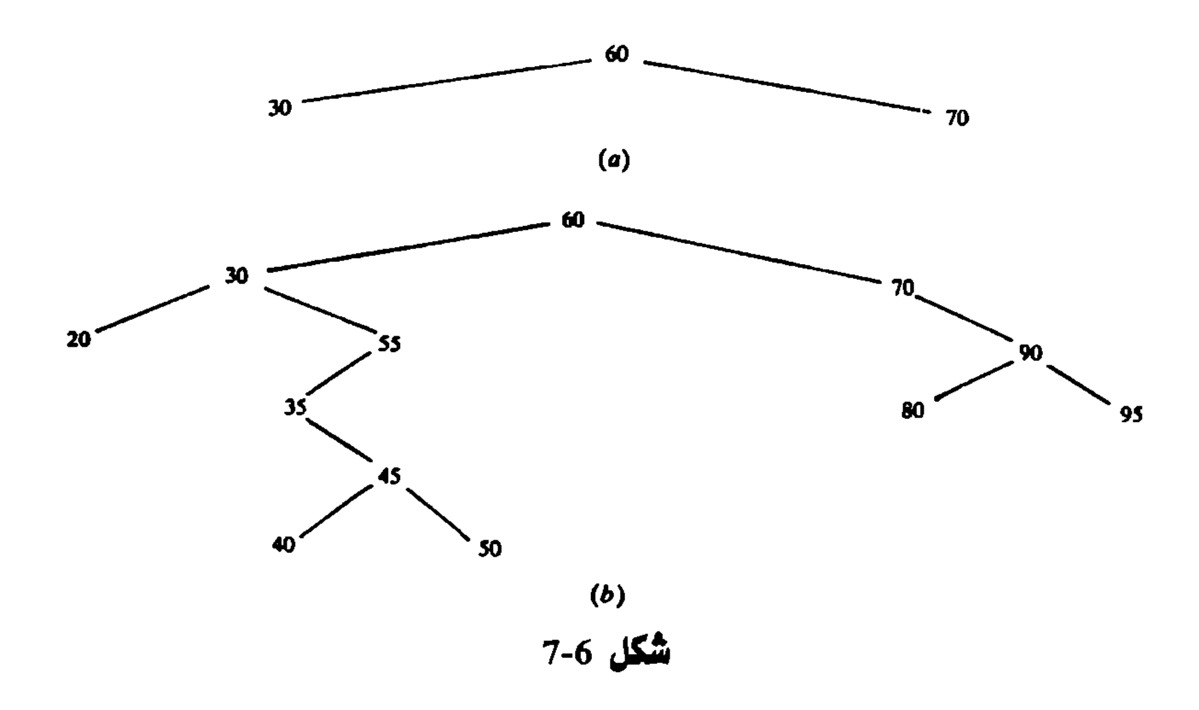
الحل: تُرسم الشجرة T من جذرها R لأسفل كما يلى:

(*a*) الجذر R يُحصل عليه من قيمة المؤشر ROOT. ويلاحظ أن ROOT = 5. إذًا INFO[5] = 60 هو الجذر R للشجرة T.

(*b*) الطفل الأيسر لـ R يُحصل عليه من مجال المؤشر الأيسر لـ R. ويلاحظ LEFT[5] = 2. وبالتالى INFO[2] = 30 هو الطفل الأيسر لـ R.

(*c*) الطفل الأيمن لـ R يُحصل عليه من مجال المؤشر الأيمن لـ R. أى أن RIGHT[5] = 6. وبالتالى INFO[6] = 70 هو الطفل الأيمن لـ R.

يمكننا الآن رسم الجزء الأعلى من الشجرة كما فى شكل 7-6(*a*). وبتكرار العملية السابقة مع كل عُقدة جديدة نحصل أخيرًا على الشجرة المطلوبة T فى شكل 7-6(*b*).



شكل 6-7

الفصل الثامن
الجبـــر البوليــانى
Boolean Algebra

فى هذا الفصل:

- ✔ التعاريف الأساسية
- ✔ الثنائية (التقابل)
- ✔ النظريات الأساسية
- ✔ البوابات والدوائر المنطقية

التعاريف الأساسية Basic Definitions

نفرض أن B فئة غير خالية ومعرَّف عليها عمليتــان ثنائيتــان + و *، وعمليـة أحادية (أى تعمل على عنصر واحد) ويرمز لها بـ ′، ومعها عنصران مختلفان هما 0 و1. عندئذٍ تسمى B جبرًا بوليانيًا إذا تحققت المسلمات التالية، حيث a، b، c أية عناصر فى B.

[B$_1$] قوانين التبديل Commutative laws:

$$a + b = b + a \qquad a * b = b * a$$

[B$_2$] قوانين التوزيع Distributive laws:

$$a + (b * c) = (a + b) * (a + c) \qquad a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$$

[B_3] قوانين التطابق Identity laws:

$$a + 0 = a \qquad a * 1 = a$$

[B_4] قوانين التمام Complement laws:

$$a + a' = 1 \qquad a * a' = 0$$

فى بعض الأحيان نرمز للجبر البوليانى بالرمز $<B, +, *, ', 0, 1>$ عندما نريد التأكيد على أجزائه الستة. ونقول إن 0 هو العنصر الصفرى وإن 1 هو عنصر الوحدة، a' هو متمم a. وعادة سوف نُسقط الرمز * نكتب العنصرين متجاورين، فمثلاً بدلاً من أن نكتب

$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$$

سوف نستخدم الصورة المبسطة

$$a(b + c) = ab + ac$$

وهى خاصية التوزيع الشائعة فى الجبر. كذلك،

$$a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$$

تصبح

$$a + bc = (a + b)(a + c),$$

وهى طبعًا لا تمثل متطابقة شائعة فى الجبر.

العمليات +، *، ' تسمى المجموع وحاصل الضرب والمتمم على الترتيب. ونتفق كما هو متبع عادة على أنه إذا لم توجد أقواس، فإن العملية. يكون لها الأسبقية على العملية * وأن العملية * يكون لها الأسبقية على العملية +. فمثلاً

$a + b * c$ تعنى $a + (b * c)$ وليس $(a + b) * c$

$a * b'$ تعنى $a * (b')$ وليس $(a * b)'$

الجبريات الجزئية والجبريات البوليانية المتشاكلة أحاديًا

Subalgebras; Isomorphic Boolean Algebras

لتكن C فئة جزئية غير خالية من جبر بولياني B. نقول إن C هي جبر جزئى subalgebra من B إذا كانت C نفسها هى جبر بوليانى (بالنسبة إلى العمليات المعرفة على B). ونلاحظ أن C تكون جبرًا جزئيًا من B إذا، وفقط إذا، كانت C مغلقة تحت تأثير العمليات الثلاث لـ B، وهى +، *، ′.

نقول أن الجبريين البوليانيين B، B' متشاكلان أحاديًا isomorphic إذا وجد تناظر واحد لواحد $f: B \to B'$ يحفظ العمليات الثلاث، أى بحيث تتحقق العلاقات

$$f(a+b)=f(a)+f(b)$$
$$f(a*b)=f(a)*f(b)$$
$$f(a')=f(a)'$$

لأى عنصرين a، b فى الجبر البوليانى B.

الثنائية (التقابل) Duality

التقرير المقابل لأى تقرير فى الجبر البوليانى B هو التقرير الذى يُحصل عليه بتبديل العمليات + و *، وتبديل العنصرين 0 و 1 فى التقرير الأصلى. مثلاً، مرافق التقرير المقابل للتقرير

$$(1+a)*(b+0)=b \quad \text{هو} \quad (0*a)+(b*1)=b$$

ونلاحظ التماثل فى مسلمات الجبر البوليانى B، بمعنى أن مجموعة المسلمات المقابلة لمجموعة مسلمات B هى نفسها المجموعة الأصلية. وبالتالى، يتحقق مبدأ الثنائية الهام فى B. وعلى وجه التحديد،

نظرية 8.1 مبدأ الثنائية Principle of Duality

المقابل لأى نظرية فى الجبر البوليانى هو أيضًا نظرية.

وبعبارة أخرى إذا كان أى تقرير هو نتيجة لمسلمات الجبر البوليانى فإن التقرير المقابل يكون كذلك نتيجة لهذه المسلمات، وذلك لأن مقابل أى تقرير يمكن إثباته باستخدام مقابل كل خطوة فى برهان التقرير الأصلى.

النظريات الأساسية Basic Theorems

باستخدام المسلمات من $[B_1]$ إلى $[B_4]$ يمكن إثبات النظريات التالية

نظرية 8.2 لتكن a، b، c أية عناصر فى الجبر البوليانى B.

(i) قوانين الرسوخ Idempotent laws:

$$a + a = a \qquad a * a = a$$

(ii) قوانين المحدودية Boundedness laws:

$$a + 1 = 1 \qquad a * 0 = 0$$

(iii) قوانين الاستيعاب Absorption laws:

$$a + (a * b) = a \qquad a * (a + b) = a$$

(iv) قوانين الدمج Associative laws:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (a * b) * c = a * (b * c)$$

نظرية 8.2 المسلمات السابقة فى الجبر البوليانى ما زالت لا تحتوى على كل خواص الفئات. النظريتان التاليتان تعطيان باقى الخواص.

نظرية 8.3 لأى عنصر a فى جبر بوليان B

(i) وحدانية العنصر المتمم Uniqueness of Complement:

إذا كانت $a + x = 1$ و $a * x = 0$ فإن $x = a'$

(ii) قانون الالتفاف Involution Law:

$$(a')' = a$$

(iii) $0' = 1; \quad 1' = 0$

نظرية 8.4 (قوانين دى مورجان) Morgan's laws

$$(a+b)' = a' * b' \qquad (a*b)' = a' + b'$$

البوابات والدوائر المنطقية Logic Gates and Circuits

الدوائر المنطقية (تسمى أيضًا الشبكات المنطقية) هى هياكل تبنى من بعض الدوائر البدائية التى تسمى بوابات منطقية. كـل دائـرة منطقيـة يمكـن النظـر إليها كآلة L تحتوى على واحد أو أكثر من أجهزة الإدخال وواحد فقط من أجهزة الإخراج. كل جهاز إدخال فى L يرسل إشـارة معينـة يقـال لـها بِـت (رقم ثنائى) bit (binary digit)،

0 or 1

إلى الدائرة L. تعالج L فئـة البِتـات bits لتعطـى فـى النهايـة بِـت المخـرج output bit. وعلى هذا، يمكن تخصيص متتابعة من n بِـت n-bit لكـل جـهاز إدخال. و L تعمل على معالجة المتتابعة الداخلة بِتا بِتا (أى معالجة بِت واحد فى المرة) لتحصل فى النهاية على متتابعة من n بِت n-bit فى المخرج نعرف أولاً البوابات المنطقية ثم ندرس بعد ذلك الدوائر المنطقية.

البوابات المنطقية Logic Gates

هناك ثلاث بوابات منطقيـة أساسـية نقـوم بوصفـها فيمـا يلـى. وسـوف نُقـر الاصطلاح على أن الخطوط الداخلة إلى رمز البوابـة مـن جهـة اليسـار هـى خطوط الإدخال والخط المنفرد على اليمين هو خط المخرج.

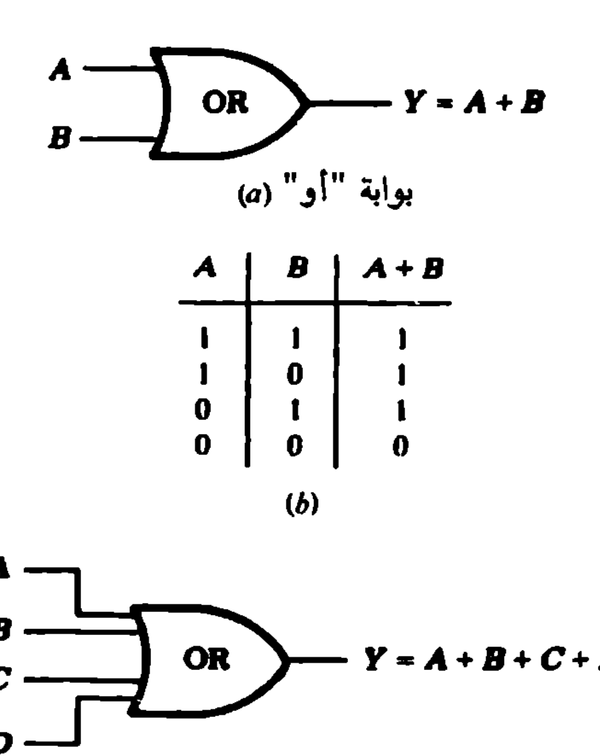
(a) **بوابة «أو» OR Gate**: شكل $8\text{-}1(a)$ يمثل بوابـة "أو" بمُدخليـن A و B ومُخرَج $Y = A + B$ حيث "الجمع" تم تعريفه بجدول الصواب فى شكل $8\text{-}1(b)$. وبذلك يكون المخرج $Y = 0$ فقط عندما يكون المدخلان $A = 0$ و $B = 0$. مثل هذه البوابة "أو" يمكن أن يكون لـها أكـثر مـن مُدخليـن اثنين. شكل $8\text{-}1(c)$ يوضح بوابـة "أو" ولـها 4 مدخـلات A، B، C، D

والمُخرَج $Y = A + B + C + D$. المُخرَج $Y = 0$ إذا، وفقط إذا، كانت جميع المدخلات تساوى صفرًا.

نفرض مثلاً أن البيانات المدخلة للبوابة "أو" فى شكل 8-1(c) هى المتتابعات المكونة من ثُمانيات البتات 8-bit التالية:

$$A = 10000101, \quad B = 10100001, \quad C = 00100100, \quad D = 10010101$$

البوابة "أو" تعطى ناتجًا 0 عندما تكون كل المدخلات أصفاراً وهذا يحدث فى الأماكن الثانى والخامس والسابع وبالتالى تكون متتابعة المخرج هى $Y = 10110101$.



(a) بوابة "أو"

A	B	A + B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(b)

(c)

شكل 8-1

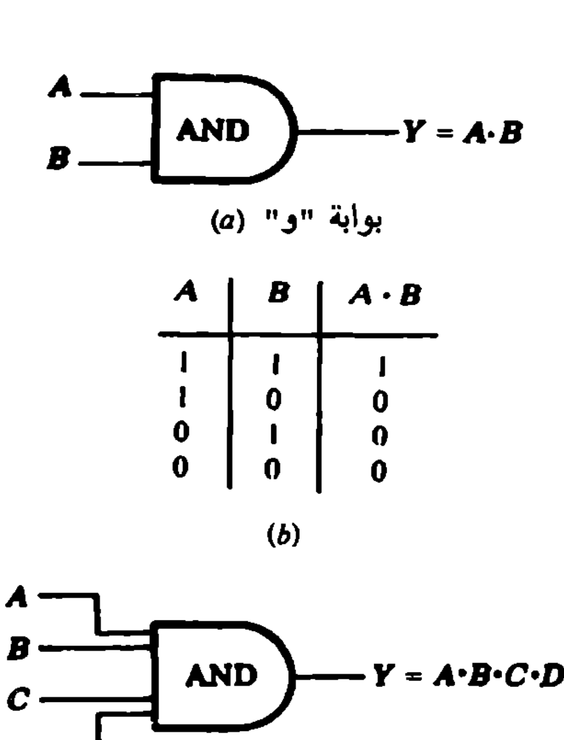
(b) بوابة «و» AND Gate: شكل 8-2(a) يوضح بوابة "و" AND بمُدخلين A و B ومُخرَج $Y = A \cdot B$ (أو ببساطة $Y = AB$) حيث "الضرب" معرَّف فى جدول الصواب فى شكل 8-2(b). وبهذا يكون المُخرَج $Y = 1$ فقط

إذا كانت $A = 1$ و $B = 1$. وفى غير ذلك فـإن $Y = 0$. هـذه البوابـة "و" يمكن أن يكون لها أكثر من مُدخلين اثنين. شكـل $8\text{-}2(c)$ يصـور بوابـة "و" لها أربعة مدخلات A، B، C، D والمُخرَج $Y = A \cdot B \cdot C \cdot D$. قيمـة المُخرَج $Y = 1$ إذا، وفقط إذا، كانت جميع قيم المدخلات تساوى 1.

نفرض مثلاً أن بيانـات المدخـلات للبوابـة "و" فـى شكـل $8\text{-}2(c)$ هـى المتتابعات المكونة من ثُمانيات البتات التالية:

$$A = 11100111, \quad B = 01111011, \quad C = 01110011, \quad D = 11101110$$

البوابة "و" تنتج 1 فقط عندما يكون جميع بتـات bits المدخـل مسـاوية 1. وهذا يحدث فقط فى الأماكن الثانى والثالث والسابع وبالتالى تكون متتابعـة المُخرَج هى $Y = 01100010$.



(a) بوابة "و"

A	B	A · B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

(b)

(c)

شكل 8-2

(c) بوابة «ليس» (النفى) NOT Gate: شكل 8-3(a) يوضح بوابة "ليس" وتسمى أيضًا عاكسا inverter لها مدخل A ومُخرَج $Y=A'$ والانعكاس يرمز له بالرمز (′) ويعرَّف بجدول الصواب فى شكل 8-3(b). قيمة الخرج $Y=A'$ هى عكس قيمة المدخل A. أى أن $A'=1$ عندما $A=0$، $A'=0$ عندما $A=1$. ونؤكد هنا على أن بوابة "ليس" لها فقط مُدخل واحد فقط بينما بوابات "أو" و "و" يمكن أن يكون لهما مُدخلين أو أكثر.

A	A'
1	0
0	1

(a) NOT gate بوابة "ليس" (b)

شكل 8-3

لنفرض مثلاً أن البوابة "ليس" مطلوب منها العمل على المتتابعات الثلاث التالية

$$A_1 = 110001, \quad A_2 = 10001111, \quad A_3 = 101100111000$$

بوابة "ليس" تغير كل 0 إلى 1 وكل 1 إلى 0. ولهذا،

$$A_1' = 001110, \quad A_2' = 01110000, \quad A_3' = 010011000111$$

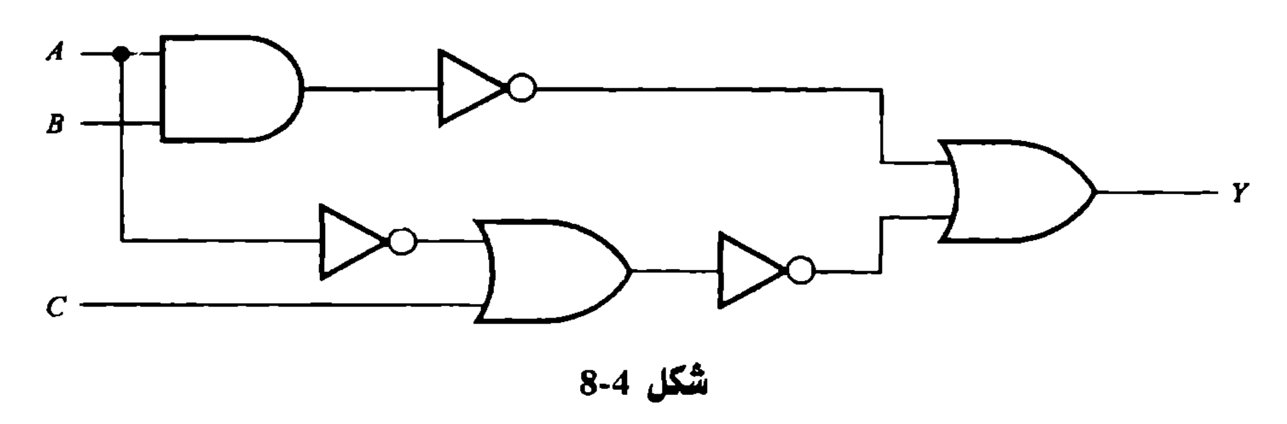
هى المخرجات الثلاثة المناظرة.

الدوائر المنطقية Logic Circuits

الدائرة المنطقية L هى هيكل محكَم التكوين ومركباته الأولية هى البوابات "أو"، "و"، "ليس" التى سبق تعريفها. شكل 8-4 هو مثال لدائرة منطقية مدخلاتها A، B، C ومخرجها Y. النقطة (.) تشير إلى مكان يتفرع فيه خط الإدخال بحيث يُرسل إشارات البت فى أكثر من اتجاه. بالعمل من اليسار إلى اليمين، نعبر عن Y بدلالة المدخلات A، B، C كالآتى: قيمة المُخرَج من بوابة "و" هو $A \cdot B$ وهذا يتم نفيه بعد ذلك ليعطى $(A \cdot B)'$. أما المُخرَج

البوابة "أو" السفلية فهو $A'+C$ حيث يُنفى بعد ذلـك ليعطـى $(A' + C)'$.
وأخيرًا مخرج البوابة "أو" التى فى اليمين ذات المُدخَلين $(A \cdot B)'$ و $(A' + C)'$
يعطى التمثيل المطلوب

$$Y=(A\cdot B)'+(A'+C)'$$



شكل 8-4

الدوائر المنطقية كجبر بوليانى Logic Circuits as a Boolean Algebra

نلاحظ أن جـداول الصـواب للبوابـات "أو"، "و"، "ليـس" تنطـابق علـى الترتيب مع جداول الصواب للتقارير $p \vee q$ (الفصل أو q)، $p \wedge q$ (العطـف p و q)، و $\neg p$ (نفى p). الفارق الوحيد هنا هو استخدام 1 و 0 بـدلاً مـن T و F. ولهذا فإن الدوائر المنطقية تحقق نفس القوانين مثل التقـارير وبالتـالى فهى تكوِّن جبرًا بوليانيًا. ونذكر هذه النتيجة فى صورة

نظرية 8.5 الدوائر المنطقية تكوِّن جبرًا بوليانيًا.

وعلى هذا فإن كل المصطلحات المستخدمة فى الجبريات البوليانية مثل المتممات، الحَرفيات، الضرب الأساسى، الحـدود الأصغـر، مجمـوع حواصـل الضـرب، المجموع التام لحواصل الضرب يمكن استخدامها أيضًا فى الدوائر المنطقية.

دائرة «و ـ أو» AND-OR Circuits

الدائرة المنطقية L المناظرة لمجموع حواصل ضرب فى الجبر البوليانى تسمى دائرة "و-أو". مثل هذه الدائرة L لها العديد من المدخلات حيث:

1. بعض المدخلات أو متمماتها تغذى كل بوابة "و".
2. مخرجات كل بوابات "و" تغذى بوابة وحيدة "أو".
3. مخرج بوابة "أو" هو مخرج الدائرة L.

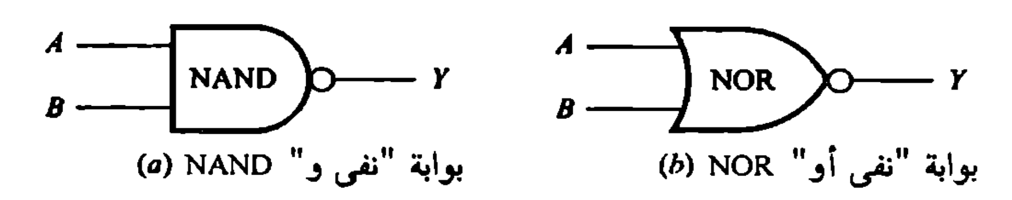
بوابات «نفي و» و «نفي أو» NAND and NOR gates

توجد بوابتان إضافيتان تكافئان تركيبات من البوابات الأساسية التي سبق تعريفها.

(*a*) بوابة "نفى و" NAND وهى مصورة فى شكل 8-5(*a*)، وتكافئ بوابة "و" يتلوها بوابة "ليس".

(*b*) بوابة "نفى أو" NOR وهى مصورة فى شكل 8-5(*b*)، تكافئ بوابة "أو" يتلوها بوابة "ليس".

جداول الصواب لهاتين البوابتين (باستخدام مدخلين A و B) موضحة فى شكل 8-5(*c*). البوابتان "نفى و" و"نفى أو" يمكن أن يكون لكل منهما اثنان أو أكثر من المدخلات تمامًا مثل بوابتى "و" و "أو" المناظرتين. وبالإضافة إلى ذلك، فإن مخرج البوابة "نفى و" يكون صفرًا إذا، وفقط إذا، كانت كل المدخلات تساوى 1، ومخرج البوابة "نفى أو" يساوى 1 إذا، وفقط إذا، كانت كل المدخلات تساوى صفرًا.



(*a*) NAND بوابة "نفى و"　　(*b*) NOR بوابة "نفى أو"

A	B	NAND	NOR
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	1

(*c*)

شكل 8-5

نلاحظ أن الفارق الوحيد بين بوابتى "و" و "نفى و" من جهة وبين بوابتى "أو" و "نفى أو" من جهة أخرى أن كل من البوابتين "نفى و" و"نفى أو" يتلوها دائرة. بعض النصوص تستخدم مثل هذه الدائرة الصغيرة للإشارة إلى المتمم قبل البوابة. فمثلاً التعبير البوليانى المناظر للدائرتين المنطقتين فى شكل 8-6 هو كالآتى:

$$(a) \quad Y = (A'B)', \qquad (b) \quad Y = (A' + B' + C)'$$

A B Y
(a)

A B C Y
(b)

شكل 8-6

مسألة محلولة 8.1 اعتبر الجبر البوليانى D_{210} (فئة قواسم العدد 210).

(*a*) اذكر قائمة عناصر هذا الجبر وارسم مخططه.
(*b*) أوجد الفئة *A* من الذرات (الأعداد الأولية).
(*c*) أوجد اثنين من الجبريات الجزئية، كل منهما يحتوى على ثمانية عناصر.

Solved Problem 8.1 Consider the Boolean algebra $\mathbf{D}_{210}$ (the set of divisors of 210).

(*a*) List its elements and draw its diagram.
(*b*) Find the set *A* of atoms.
(*c*) Find two subalgebras with eight elements.

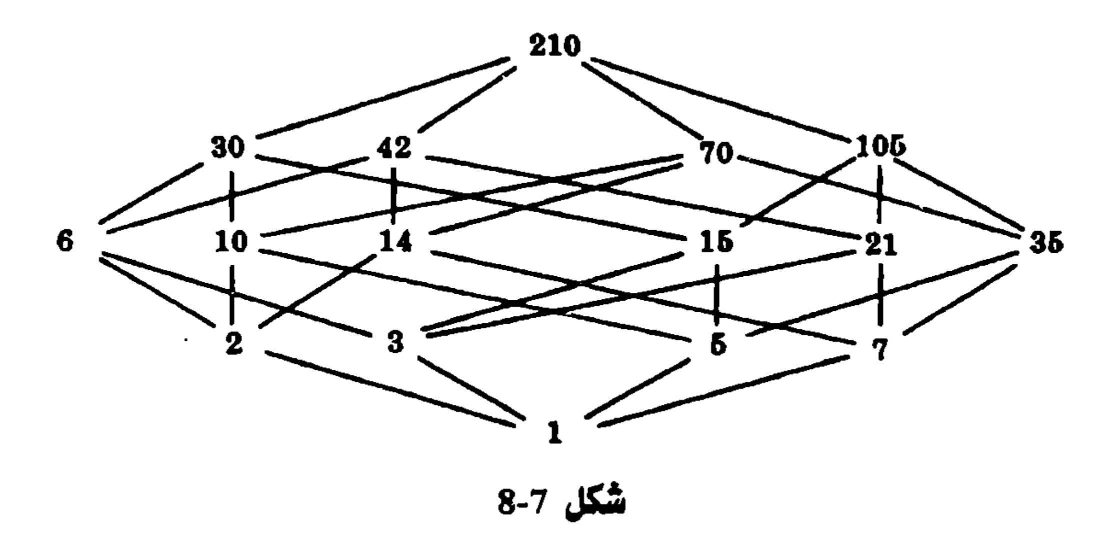
الحل:

(*a*) قواسم العدد 210 هى 1، 2، 3، 5، 6، 7، 10، 14، 15، 21، 30، 35، 42، 70، 105، 210. مخطط D_{210} يظهر فى شكل 8-7.

(*b*) $A = \{2, 3, 5, 7\}$ هى فئة القواسم للعدد 210 من الأعداد الأولية.

(c) الفئتان $B = \{1, 2, 3, 6, 35, 70, 105, 210\}$،

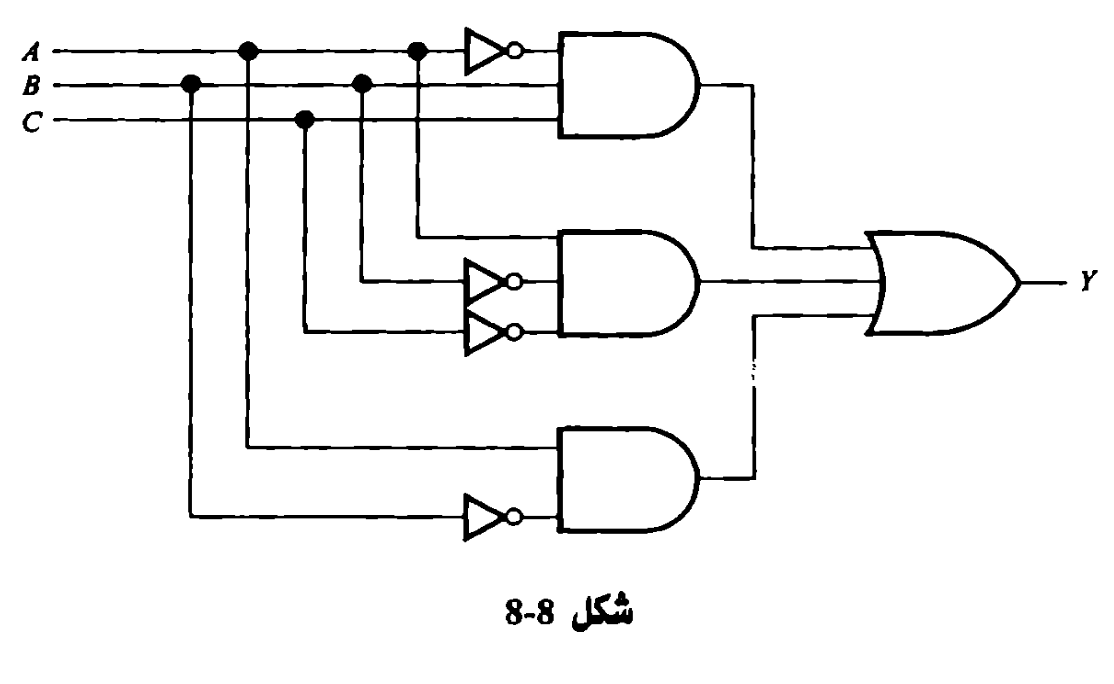
$C = \{1, 5, 6, 7, 30, 35, 42, 210\}$ يكونان اثنين من الجبريات الجزئية لـ D_{210}.



شكل 8-7

مسألة محلولة 8.2 عبر عن المُخرَج Y كتعبير بوليـانى حيـث A، B، C هـى مدخلات الدائرة المنطقية فى شكل 8-8.

Solved Problem 8.2 Express the output Y as a Boolean expression in the inputs A, B, C for the logic circuit in Figure 8-8.



شكل 8-8

الحل: مُخَرج أول بوابة "و" هو $A'BC$ ومخرج ثانى بوابة "و" هــو $AB'C'$.
مخرج آخر بوابة "و" هو AB'. ولهذا، فإن

$$Y = A'BC + AB'C' + AB'$$

مسألة محلولة 8-3 عبِّر عن قيمة المخرج Y كتعبير بوليانى بدلالة المدخلين A و B للدائرة المنطقية فى شكل 8-9.

Solved Problem 8.3 Express the output Y as a Boolean expression in the inputs A and B for the logic circuit in Figure 8-9.

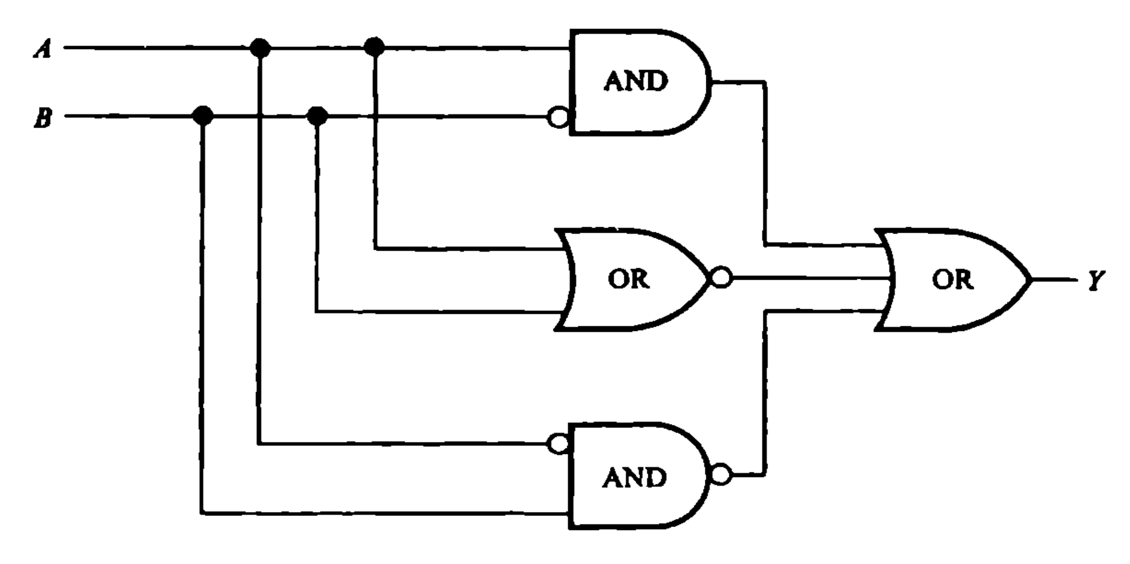


Figure 8-9

الحل: هنا الدائرة الصغيرة فى الدائرة المنطقية تعنى المتمم. ولهذا فإن قيمة مُخرَج البوابات الثلاث على اليسار هــو AB'، $(A + B)'$، $(A'B)'$. وبالتالى

$$Y = AB' + (A + B)' + (A'B)'$$

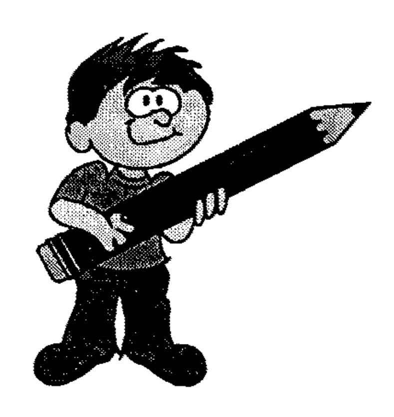
الفصل التاسع
اللغات، القواعد، الآلات
Languages, Grammars, Machines

فى هذا الفصل:

- ✔ الأبجدية، الكلمات، شبه الزمرة الحرة
- ✔ اللغات
- ✔ القواعد
- ✔ آلات الحالة المنتهية

الأبجدية، الكلمات، شبه الزمرة الحرة
Alphabet, Words, Free Semigroup

نعتبر فئة A غير خالية من الرموز. الكلمة (word أو string) w على الفئة A هى متتابعة منتهية من عناصر A. فمثلاً المتتابعتان



$u = ababb$ و $v = accbaaa$

هما كلمتان على الفئة $A = \{a, b, c\}$. عند مناقشة الكلمات على A، عادة ما تسمى A أبجدية alphabet، وتسمى عناصرها حروفا letters. أيضًا، نختصر مصطلحاتنا ونكتب a^2 بدلاً من aa،

a^3 بدلاً من aaa وهكذا. ولهذا فإن الكلمتين السابقتين $u = abab^2$ و $v = ac^2ba^3$.

المتتابعة الخالية من الحروف، ويرمز لها بالرمز λ، أو ε (ويقرآن لَمْدا lambda، إبسِلُن epsilon) أو 1 تعتبر أيضًا كلمة على A تسمى الكلمة الخالية empty word. فئة جميع الكلمات على A يرمز لها بالرمز A^*.

طول length الكلمة u، ويكتب $|u|$ أو $l(u)$، هو عدد العناصر فى متتابعة الحروف الخاصة بها. فللكلمتين u، و v السابقتين نجد أن $l(u) = 5$ و $\lambda(v) = 7$. أيضًا $l(\lambda) = 0$ حيث λ الكلمة الخالية.

ملحوظة: إذا لم يذكر غير ذلك فإن الأبجدية A تكون منتهية والرموز u، v، w سوف يرمز بها لكلمات على A، عناصر A هى الحروف a، b، c.

التعاقب Concatenation

نعتبر كلمتين u، v على الأبجدية A. تعاقب concatenation u و v ويكتب uv هو الكلمة التى نحصل عليها بكتابة حروف u تليها حروف v. فمثلاً للكلمتين u، v السابقتين نحصل على

$$uv = ababbaccbaaa = abab^2ac^2ba^3$$

وكما فى الحروف، نعرف $uu = u^2$، $uuu = u^3$ وفى الحالة العامة $u^{n+1} = uu^n$ حيث u كلمة.

من الواضح لأى كلمات u، v، w أن الكلمتين $(uv)w$ و $u(vw)$ متطابقتان لأنهما ببساطة تتكونان من حروف الكلمات u، v، w مكتوبة واحدًا بعد الآخر. أيضًا، إضافة الكلمة الخالية قبل أو بعد أى كلمة u لا تغير الكلمة u. وبعبارة أخرى:

نظرية 9.1: عملية التعاقب للكلمات على الأبجدية A هى عملية ادماجية. الكلمة الخالية λ هى العنصر المحايد فى هذه العملية.

الكلمات الجزئية؛ قِطَع البداءة Subwords; Initial Segments

نعتبر أى كلمة $u = a_1a_2 \ldots. a_n$ على الأبجدية A. أى متتابعة $w = a_ja_{j+1} \ldots. a_k$ تسمى كلمة جزئية subword للكلمة u. على وجه الخصوص الكلمة الجزئيـة $w = a_1a_2 \ldots. a_k$ التى تبدأ بالحـرف الأول من u تسمى قطعة البـداءة initial segment من u. وبعبارة أخرى w كلمة جزئية من u إذا كان $u = v_1wv_2$، و w بداءة u إذا كان $u = wv$. لاحظ أن كل من λ، u كلمات جزئيـة مـن u لأن $u = \lambda u$.

نعتبر الكلمة $u = abca$. الكلمات الجزئية وقطع البداءة من u هى:

1. الكلمات الجزئية: λ، a، b، c، ab، bc، ca، abc، bca، $abca$
2. قِطَع البداءة: λ، a، ab، abc، $abca$.

لاحظ أن الكلمة الجزئية $w = a$ تظهر فى مكانين فى u. الكلمـة ac لا تمثـل كلمة جزئية من u بالرغم من أنها مكونة من حروف تنتمى إلى u.

شبه الزمرة الحرة؛ الزمرة الأحادية الحرة

Free Semigroup; Free Monoid

نفرض أن F ترمز لفئة كل الكلمات غير الخالية على الأبجدية A مـع عمليـة التعاقب. كما لاحظنا سابقاً، هـذه العمليـة ادماجيـة. F تسـمى شبـه الزمـرة الحرة على A أو شبه الزمرة الحرة المولّدة بواسطة A. من السهل إثبات أن F تحقق قوانين الحذف من اليمين ومن اليسار. وعلى أية حال F ليست تبديلية عندما تحتوى A على أكثر من عنصر واحد. وسـوف نرمـز بـالرمز F_A لشبـه الزمرة الحرة على A عندما نريد تعيين الفئة A.

الآن لتكن $M = A^*$ فئة الكلمات من A التـى تحتـوى الكلمـة الخاليـة λ. وبما أن λ هو عنصر الوحدة لعملية التعاقب، فإن M تسمى الزمرة الأحاديـة الحرة free monoid على A.

اللغات Languages

اللغة language L على الأبجدية A هى مجموعة من الكلمات على A. تتذكر أن A^* ترمز إلى فئة كل الكلمات على A. وبهذا فإن L هى فئة جزئية من A^*.

عمليات على اللغات Operations on Languages

نفرض أن L و M لغتان على الأبجدية A. نعـرف تعـاقب "concatenation" L و M، نرمز له بـ LM، بأنه لغة معرفة كالآتى:

$$LM = \{uv : u \in L, v \in M\}$$

أى أن LM ترمز إلى فئة جميع الكلمات التى تأتى من تعـاقب كلمـة مـن L مع كلمة من M. ومن الواضح أن عملية تعاقب اللغـات ادماجيـة لأن تعـاقب الكلمات عملية ادماجية.

قوى اللغة "powers of language" L تعرف كالآتى:

$$L^0 = \{\lambda\}, \quad L^1 = L, \quad L^2 = LL, \quad L^{m+1} = L^m L \text{ for } m > 1$$

العملية الأحادية unary operation L^* (وتقرأ L نجمة) للغة L وتسمى إغـلاق كلين "kleene closure" لـ L تعرف بأنها الاتحاد اللانهائى

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k$$

القواعد Grammars

يبين شكل 1-9 قواعد تركيب جملة معينة. نلاحظ وجود:

(1) متغيرات مختلفة مثل ⟨جملة⟩، ⟨جملة اسمية⟩ ، ...؛

(2) كلمات طرفية مختلفة مثلاً "The"، "boy"، ...؛

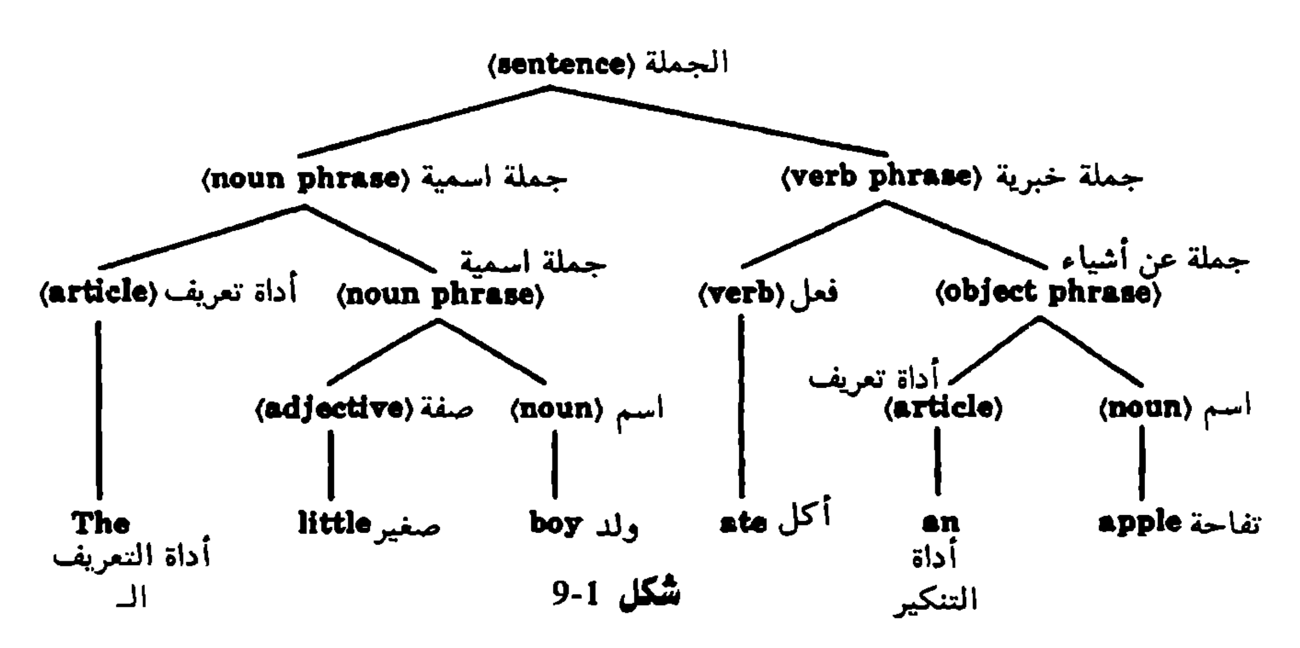
(3) متغير البداية ⟨جملة⟩

(4) تعويضات مختلفة أو نواتج مثلاً

⟨sentence⟩ → ⟨noun phrase⟩⟨verb phrase⟩
⟨object phrase⟩ → ⟨article⟩⟨noun⟩
⟨noun⟩ → apple

⟨جملة⟩ ← ⟨جملة اسمية⟩ ⟨جملة فعلية⟩
⟨جملة مفعول⟩ ← ⟨كلمة طرفية⟩ ⟨اسم⟩
⟨اسم⟩ ← ⟨تفاحة⟩

الجملة النهائية فقط تحتوى الأطراف، بالرغم من أن كل من المتغيرات والأطراف تظهر في تكوين الجملة بواسطة النواتج. هذا الوصف البديهى أُعطى ليكون مبرراً لتقديم التعريف التالى للقواعد واللغة التى تولدها.



شكل 9-1

قواعد تكوين العبارات، أو باختصار القواعد G، تتكون من أربعة أجزاء:

(1) فئة منتهية V (مفردات اللغة).

(2) فئة جزئية T من V عناصرها تسمى الأطراف؛ عناصر $N = V\backslash T$ تسمى عناصر غير طرفيه أو متغيرات.

(3) رمز غير طرفى S يُسمَّى رمز البداية Start.

(4) فئة منتهية P من النواتج. الناتج هو زوج مرتب (α, β) يُكتب عادة $\alpha \to \beta$ حيث α و β كلمات فى V. كل ناتج فى P يجب أن يحتوى على الأقل على عنصر واحد غير طرفى على جانبه الأيسر.

مثل هذه القواعد G يرمز لها بالرمز $G = G(V, T, S, P)$ عندما نريد الإشارة إلى أجزائها الأربعة.

إذا لم يذكر غير ذلك فإن التمثيل الرمزى التالى سوف يُستخدم للدلالة على القواعد وسنرمز للأطراف بالحروف a، b، c، ... وللعناصر غير الطرفية بالحروف اللاتينية الكبيرة المائلة A، B، C، ... مع رمز البداية S. أيضًا الحروف الإغريقية α، β، ... سوف ترمز للكلمات فى V، أى الكلمات الطرفية وغير الطرفية. وعلاوة على ذلك سوف نكتب

$$\alpha \to (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) \quad \text{بدلاً من} \quad \alpha \to \beta_1, \alpha \to \beta_2 \dots, \alpha \to \beta_k$$

ملاحظة: كثيرًا ما سنعرف القواعد G فقط بإعطاء النواتج، مفترضين ضمنيًا أن S هو رمز البداية وأن العناصر الطرفية وغير الطرفية فى G هى فقط ما يظهر فى النواتج.

اللغة $L(G)$ للقواعد G Language $L(G)$ of a Grammar G

لتكن w و w' كلمتين على فئة مفردات اللغة V للقواعد G. نكتب $w \Rightarrow w'$ إذا أمكن الحصول على w' من w باستخدام أحد النواتج، أى إذا وجدت كلمتان u، v تحققان $w = u\alpha v$، $w' = u\beta v$ وناتج $\alpha \to \beta$. ونكتب ذلك بصورة

$$w \Rightarrow\Rightarrow w' \quad \text{أو} \quad w^* \Rightarrow w'$$

إذا أمكن الحصول على w' من w باستخدام عدد محدود من النواتج.

لتكن G قواعد ذات الفئة الطرفية T. لغة القواعد (G)، ويرمز لها بـ $L(G)$، تتكون من جميع الكلمات فى T التى يمكن الحصول عليها من رمز البداية S بالعملية السابقة، أى أن

$$L(G) = \{w \in T^* : S \Rightarrow\Rightarrow w\}$$

أنواع القواعد   Types of Grammars

تصنف القواعد إلى فصول تبعًا لأنواع النواتج التى تسمح بها. التقسيم التالى للقواعد يرجع إلى نُوام شومسكى Noam Chomsky.

النوع 0 للقواعد ليس على نواتجه أية قيود. الأنواع 1، 2، 3 تعرف كالتالى:

(1) القواعد G يقال أنها من النوع 1 إذا كـان لكـل نـاتج الصـورة $\alpha \to \beta$ حيث $|\alpha| \le |\beta|$ أو الصورة $\alpha \to \lambda$.

(2) القواعد G يقال أنها من النوع 2 إذا كـان لكـل نـاتج الصـورة $A \to \beta$ حيث الجانب الأيسر غير طرفى.

(3) القواعد G يقال أنها من النوع 3 إذا كان لكل ناتج الصورة $A \to a$ أو الصورة $A \to a\,B$، أى عندما يكون الجـانب الأيسـر عنصـرًا غـير طرفـى واحدًا والجانب الأيمن عنصرًا طرفيًا واحدًا أو عنصرًا طرفيًا يليه عنصر غير طرفى أو على الصورة $S \to \lambda$.

لاحظ أن القواعد تكوّن تدرجًا هرميًا أى أن كل قواعـد النـوع 3 هـى أيضًا من النوع 2 وكل قواعد النوع 2 هى أيضًا مـن النـوع 1 وكـل قواعـد النوع 1 هى أيضًا من النوع 0.

تصنف القواعد أيضًا وفقًا لكونها "حساسـة للسـياق" أو "غـير مرتبطـة بالسياق" أو "نظامية" كالآتى:

(a) القواعد G يقال أنها حساسة للسياق context-sensitive إذا كانت النواتـج على الشكل

$$\alpha A \alpha' \to \alpha \beta \alpha'$$

وتأتى هذه التسمية نتيجة لإمكانية تبديـل A بـ β فـى الكلمـة فقـط إذا كانت A تقع بين α، α'.

(b) القواعد G تسمى "غير مرتبطة بالسياق" context-free إذا كـانت النواتـج على الشكل

$$A \to \beta$$

وتأتى هذه التسمية من حقيقة أننا نبدّل المتغير A بـ β دون النظر لموقع ظهور A.

(c) القواعد G يقال لها نظامية regular إذا كانت النواتج على الصورة

$$A \to a, \quad A \to aB, \quad S \to \lambda$$

يلاحظ أن القواعد من النوع غير المرتبط بالسياق هى نفسها القواعد من النوع 2 وأن القواعد النظامية هى نفسها من النوع 3.

مسألة محلولة 9.1 عيّن نوع القواعد G المكوّنة من النواتج:

Solved Problem 9.1 Determine the type of grammar G which consists of the productions:

(a) $S \to aA, A \to aAB, B \to b, A \to a$
(b) $S \to aAB, AB \to bB, B \to b, A \to aB$
(c) $S \to aAB, AB \to a, A \to b, B \to AB$
(d) $S \to aB, B \to bA, B \to b, B \to a, \ A \to aB, A \to a$

الحل:

(a) كل ناتج على الصورة $A \to a$، أى أن المتغير على الجانب الأيسر، فيكون G من النوع غير المرتبط بالسياق أو من النوع 2.

(b) طول الجانب الأيسر فى كل ناتج لا يزيد عن طول الجانب الأيمن وبالتالى G من النوع 1.

(c) الناتج $AB \to a$ يعنى أن G من النوع 0.

(d) G نظامية أو من النوع 3 حيث كل ناتج له الصورة $A \to a$ أو $A \to aB$.

آلات الحالة المنتهية Finite State Machines

آلة الحالة المنتهية أو (الآلة التتابعية التامة) M تتكون من 6 أجزاء:

(1) فئة منتهية A من رموز المدخلات.

(2) فئة منتهية S من الحالات "الداخلية" "internal".

(3) فئة منتهية Z من رموز المخرجات.

(4) حالة ابتدائية s_0 فى S.

(5) دالة f تسمى دالة الحالة التالية، $f: S \times A \to S$.

(6) دالة المُخرَج g، $g: S \times A \to Z$.

يرمز لمثل هذه الآلة M بالرمز

$$M = M(A, S, Z, s_0, f, g)$$

عندما نريد أن نبين أجزاءها الستة.

مثال: فيما يلى نعرف آلة الحالة المنتهية M التى لها رمزان للمدخَلات وثلاث حالات داخلية وثلاثة رموز للمُخرَجات.

Example. The following defines a finite state machine M with two input symbols, three internal states, and three output symbols:

(1) $A = \{a, b\}$.

(2) $S = \{s_0, s_1, s_2\}$.

(3) $Z = \{x, y, z\}$.

(4) Initial state s_0.

(5) دالة الحالة التالية next-state function $f: S \times A \to S$ معرفة كالآتى

$$f(s_0, a) = s_1,\ f(s_1, a) = s_2,\ f(s_2, a) = s_0$$
$$f(s_o, b) = s_2,\ f(s_1, b) = s_1,\ f(s_2, b) = s_1$$

(6) دالة المُخرَج $g: S \times A \to Z$ معرفة كالآتى:

$$g(s_0, a) = x,\ \ g(s_1, a) = x,\ \ g(s_2, a) = z$$
$$g(s_o, b) = y,\ \ g(s_1, b) = z,\ \ g(s_2, b) = y$$

مسألة محلولة 9.2 نعتبر الكلمات

$$u = a^2ba^3b^2 \text{ and } v = bab^2$$

أوجد: (a) uv; (b) vu; (c) v^2.

Solved Problem 9.2 Consider the words

$$u = a^2ba^3b^2 \text{ and } v = bab^2$$

find: (a) uv; (b) vu; (c) v^2.

الحل: نكتب حروف الكلمة الأولى تتبعها حروف الكلمة الثانية:

$$(a) \quad uv = (a^2ba^3b^2)(bab^2) = a^2ba^3b^3ab^2$$

$$(b) \quad vu = (bab^2)(a^2ba^3b^2) = bab^2a^2ba^3b^2$$

$$(c) \quad v^2 = vv = (bab^2)(bab^2) = bab^3ab^2$$

مسألة محلولة 9.3 ما هو الفارق، إن وجد، بين شبه الزمرة الحرة على الأبجدية A والزمرة الأحادية الحرة Free Monoid على A؟

Solved Problem 9.3 What, if any, is the difference between the free semigroup on an alphabet A and the free monoid on A?

الحل: شبه الزمرة الحرة على A هى فئة جميع الكلمات غير الخالية فى A تحت تأثير عملية التعاقب، لكن الزمرة الأحادية الحرة على A تحتوى على الكلمة الخالية λ.

قائمة المصطلحات العلمية (إنجليزى/عربى)

(A)

Ackermann function دالة أكرمان

Algebra: جبر

propositions قضايا

sets فئات

Algorithms: خوارزميات

binary trees أشجار ثنائية

Euclidian إقليدسية

functions دوال

Kruskal كروسكال

spanning tree الشجرة المولِّدة

Alphabet أبجدية

Antisymmetric relations

علاقات غير متماثلة (متخالفة)

Arguments حُجج

Associative laws قوانين الدمج

(B)

Biconditional statements

تقارير ثنائية الشرطية

Binary relation علاقات ثنائية

Binary search trees أشجار البحث الثنائية

Binary trees: أشجار ثنائية

about عن

complete تامة

extended ممتدة

representing in memory

تمثيل فى الذاكرة

traversing اجتياز

Binomial coefficients

معاملات ذات الحدين

Bipartite graphs مخططات ثنائية التجزىء

Boolean algebra: جبر بوليانى

definitions تعاريف

duality ثنائية

logic gates and circuits

بوابات ودوائر منطقية

Bridges معابر

(C)

Classes of sets فصول الفئات

Closure properties خواص الإغلاق

Combinations توافيق

Commutative laws قوانين التبديل

Complement law قانون متمم

Complete graphs مخططات تامة

Composition of relations

تركيب العلاقات

Conditional statements تقارير شرطية

Connected components مركبات مترابطة

Connectivity ترابط

Contradictions تناقضات

Counting العدّ
Counting principles مبادئ العدّ
Cutpoints نقاط قطع

(D)

Data structures هياكل البيانات
Degree of a vertex درجة الرأس
DeMorgan's laws قوانين دى مورجان
Diameter قطر
Distance مسافة
Duality ثنائية (تقابل)

(E)

Empty set فئة خالية
Equivalence relations علاقات تكافؤ
Euclidean algorithm خوارزمية إقليدسية
Exponential functions دوال أسية

(F)

Factorial function دالة المضروب
Factorial notation رمز المضروب
Fibonacci sequence متتابعة فيبوناتشى
Finite graphs مخططات منتهية
Finite sets, counting principle
فئات منتهية، مبدأ العد
Finite state machines
آلات الحالة المنتهية
Free semigroup شبه الزمرة الحرة
Functions دوال
  as relations كعلاقات
  exponential أُسية
  factorial مضروب
  invertible منعكسة
  logarithmic لوغاريتمية
  one-to-one واحد لواحد
  onto فوقية (غامرة)
  prepositional تقريرية
  recursively defined معرّفة تكراريًا

(G)

Grammars قواعد
Graph theory نظرية المخططات
Graphs مخططات
  bipartite ثنائية التجزىء
  complete تامة
  finite منتهية
  homeomorphic توءم
  isomorphic تشاكل أحادى
  labeled معلّمة
  regular نظامية
  tree شجرية
  trivial تافهة
  weighted موزونة

(H)

Homeomorphic graphs مخططات توءمة
Horner's method طريقة هورنر

Inclusion-exclusion principle
المبدأ الشامل - المانع
Idempotent law قانون الرسوخ

Identity law قانون التطابق

Indexed classes of sets

فصول مفهرسة للفئات

Inverse relation علاقة عكسية

Invertible functions دوال منعكسة

Involution law قانون الالتفاف

Isomorphic graphs

مخططات فى تشاكل أحادى

(K)

Kleene closure of L إغلاق كلين لـ L

(L)

Labeled graphs مخططات (معلّمة)

Languages لغات

Laws: قوانين:

- algebra of propositions جبر القضايا
- algebra of sets جبر الفئات
- associative إدماجية
- commutative تبديلية
- complement متممة
- DeMorgan's دى مورجان
- distributive توزيعية
- idempotent الرسوخ
- identity التطابق
- involution الالتفاف

Logarithmic function دالة لوغاريتمية

Logic and prepositional calculus

المنطق والحساب التقريرى

Logic circuits دوائر منطقية

Logic gates بوابات منطقية

Logical equivalence تكافؤ منطقى

Logical operations عمليات منطقية

(M)

Machines آلات

- finite state منتهية الحالة

Mathematical functions دوال رياضية

Mathematical induction استنتاج رياضى

Minimum spanning trees

الأشجار المولدة الأقل

Multigraphs متعدد المخططات

(N)

Negation of quantified statements

نفى التقارير المسورة

Notation ترميز

(O)

One-to-one functions دوال واحد لواحد

Onto functions دوال فوقية (غامرة)

Ordered and unordered partitions

تجزيئات مرتّبة وغير مرتّبة

(P)

Partial ordering relations علاقات مرتبة

Partitions تجزيئات

Pascal's triangle مثلث بسكال

Paths مسارات

Permutations تباديل

Pictorial representations of relations

التمثيل التصويرى للعلاقات

Pigeonhole principle مبدأ (خُن الحمام)

Power set فئة القوى

Principles: مبادئ

counting العدّ

inclusion-exclusion الشامل – المانع

of abstraction التجريد

of duality الثنائية

of extension المد

of finite sets, counting
الفئات المنتهية، العد

of mathematical induction
الاستنتاج الرياضى

of substitution التعويض

pigeonhole خُن الحمام

product rule قاعدة ضرب

sum rule قاعدة جمع

Priority queue طابور الأولوية

Product sets فئات ضرب

Propositional functions دوال القضايا

Propositions قضايا

(Q)

Quantifiers أسوار

(R)

Recursively defined functions
دوال معرفة تكراريًا

Reflexive relations علاقات انعكاسية

Regular graphs مخططات نظامية

Relations علاقات

antisymmetric متخالفة

binary ثنائية

composition of تركيب

equivalence تكافؤ

functions as دوال كـ

inverse معكوس

partial ordering مرتّبة جزئيًا

pictorial representation
تمثيل تصويرى

reflexive انعكاسية

(S)

Symmetric متماثل

Sequences متتابعات

Set operations عمليات على الفئة

Set theory نظرية الفئات

Sets: فئات

classes فصول

indexed classes فصول مفهرسة

power فئات القوى

symbols رموز

Solution set فئة الحل

Stacks رصّات

Subgraphs مخططات جزئية

Subsets فئات جزئية

Symmetric relations علاقات متماثلة

(T)

Tautologies صوابات منطقية

Theorems: نظريات

علاقات	relations
فئات جزئية	subsets
إغلاق متعدى	transitive closure
مخطط شجرى	tree graph
درجة الرأس	vertex degree of
علاقات متعدية	Transitive relations
مخططات شجرية	Tree graphs
مخططات تافهة	Trivial graphs
جداول الصواب	Truth tables

(U)

الفئة الشاملة	Universal set

(V)

مخططات ڤن	Venn diagrams
رأس	Vertex

(W)

مخططات موزونة	Weighted graphs
كلمات	Words

جبر الفئات	algebra of sets
حجة	argument
جبر بوليانى	Boolean algebra
توفيق	combination
تعاقب	concatenation
دى مورجان	DeMorgan
ثنائية (تقابل)	duality
علاقات تكافؤ	equivalence relations
مكافئات	equivalents
فئات منتهية	finite sets
المانع - الشامل	inclusion-exclusion
دالة منعكسة	invertible function
دوائر منطقية	logic circuits
تجزئيات مرتبة	ordered partitions
مثلث بسكال	Pascal's triangle
مسار	path
تباديل	permutations
قضايا	propositions
إغلاق انعكاسى ومتماثل	reflexive and symmetric closure

Study Guides/Mathematics

When you don't have the time... but you still need the grade!

If your life is too busy to spend hours ploughing through weighty textbooks, and you need every study minute to count, *Schaum's Easy Outline of Discrete Mathematics* is perfect for you!This super-condensed, high-torque study guide gives you what you need to know in a fraction of the time.

SUPER-IMPACT

Built for quick, effective study, this *Easy Outline* packs exciting new learning tools that make mastering discrete mathematics fast, fun—and almost automatic.

SPEEDY

Quick-study experts slashed the time you need to spend with your books by reducing discrete mathematics to the essentials the professor expects you to know. This *Easy Outline* is perfect for test preparation, pre-exam review, and handling those last-minute cram situations.

HI-QUALITY

Easy Outlines give you 100% of the authority of Schaum's full-sized guides, known around the world for the highest academic standards.

BACKPACK-ABLE STUDY POWER

Compact and portable, this *Easy Outline* lets you study discrete mathematics anywhere.

SCHAUM'S GETS THE GRADE!

Let's talk bottom line. *Schaum's* Easy Outlines give you what you want—better grades, with less work, and more free time!

Get the essence of discrete mathematics the easy way. *Schaum's Easy Outline of Discrete Mathematics* helps you master discrete mathematics with plenty of illustrations, memory joggers, and the newest, rapid-absorption teaching techniques. Backed by Schaum's reputation for academic authority, this is the study guide students turn to and trust. Students know that Schaum's is going to be there for them when they need it!

- Quick study tips
- Student-friendly style
- At-a-glance tables
- Perfect for test prep



The McGraw-Hill Companies

Visit us at: www.books.mcgraw-hill.com

ISBN 977-282-216-4

6 222006 696689

Arabic version by:

International House for Cultural Investments S.A.E.